

**UNIVERSITÉ DE LIMOGES**  
ÉCOLE DOCTORALE Science – Technologie – Santé  
FACULTÉ des SCIENCES et TECHNIQUES  
Département Maths-Info, Laboratoire XLIM

Année 2006

Thèse N° 65 - 2006

## **Thèse**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LIMOGES**

**Discipline : Mathématiques et ses applications**

présentée et soutenue publiquement

par

**Nicolas LE ROUX**

le 17 novembre 2006

## **Solutions formelles d'équations aux dérivées partielles**

Thèse codirigée par Moulay BARKATOU et Évelyne HUBERT

### **Jury**

**Président :**

Reinhard SCHÄFKE                      Professeur à l'université Louis Pasteur, Strasbourg

**Rapporteurs :**

José M. CANO TORRES                  Professeur à l'université de Valladolid

Michèle LODAY-RICHAUD              Professeur à l'université d'Angers

**Examineurs :**

Moulay BARKATOU                      Professeur à l'université de Limoges

Évelyne HUBERT                         Chargé de recherche à l'INRIA Sophia Antipolis

Eckhard PFLÜGEL                        Maître de conférences à l'université de Kingston, Londres



# Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Moulay Barkatou et Évelyne Hubert qui ont encadré mon travail durant ces quatre années de “grand écart” entre le LACO (devenu depuis le département maths-info du laboratoire XLIM) et l’INRIA Sophia Antipolis. Je les remercie tous les deux pour la grande liberté qu’ils ont su m’accorder et pour leurs nombreux conseils quand j’en ai eu besoin.

Je remercie chaleureusement José Cano d’avoir accepté de rapporter ma thèse et de m’avoir accueilli pendant une semaine au sein du Departamento de Algebra Geometrica y Topologia. Je le remercie pour l’intérêt qu’il a porté à mon travail.

Je suis reconnaissant envers Michèle Loday d’avoir rapporté mon travail. Je la remercie chaleureusement pour ses nombreux conseils, tant sur la forme que sur le fond, qui ont grandement amélioré la lisibilité du mémoire.

Je suis très honoré par la présence de Reinhard Schäfke au sein de mon jury. Je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie Eckhard Pflügel pour l’intérêt qu’il a porté à mon travail et pour ses conseils sur la rédaction. Je suis très heureux de le voir participer à mon jury.

Je remercie toutes les personnes cotoyées lors de mes séjours au projet CAFE (INRIA Sophia Antipolis) pour leur accueil, leur gentillesse et l’ambiance conviviale qui y régnait. Je remercie plus particulièrement Montserrat Argente qui a géré mes soucis matériels à chacun de mes séjours; Stéphane Dalmas qui a été ma “roue de secours” informatique; Alban Quadrat pour sa disponibilité et ses explications sur la théorie de l’intégrabilité formelle, notamment les travaux de C. Riquier et M. Janet; j’ai une pensée particulière pour Manuel Bronstein dont je regretterai la jovialité et le climat convivial qu’il avait su créer au sein du projet.

Je salue mes camarades de promotion de DEA Vincent Lunot et Jean-Pierre Técourt qui ont choisi le ciel plus clément de la côte d’azur et que j’ai plaisir à revoir à chacun de mes séjours à l’INRIA.

J’ai passé une large partie de mon temps au sein du LACO (devenu depuis ...) et de nombreuses personnes ont contribué à faciliter mon travail et à mettre de la gaîté. J’en remercie l’ensemble des membres du LACO (devenu

depuis ...); tout particulièrement Yolande Vieceli – la “mère-poule” du laboratoire – pour son écoute, sa disponibilité et sa grande efficacité à résoudre les problèmes administratifs; les différentes secrétaires qui se sont succédées : Martine Guerletin, Nadine Tchefranoff, Sylvie Laval et Patricia Vareille pour leur grande disponibilité malgré leur charge de travail.

J’ai sollicité à tour de rôle François Arnault, Ayoub Otmani, Philippe Ségalat, Laurent Dubreuil, Henri Massias et Guilhem Castagnos quand j’avais des soucis informatiques. Je les remercie de nouveau pour leur aide précieuse.

Les discussions font grandement avancer la recherche et j’ai pu profiter de nombreuses discussions lors de mes années passées au LACO (devenu depuis ...). Je remercie tout particulièrement Jacques-Arthur Weil pour son enthousiasme débordant, ses conseils avisés et sa bienveillance quand je lui demandais des conseils de dernière minute. Je remercie Olivier Ruatta, arrivé il y a deux ans et que j’avais connu auparavant lors de mes séjours à l’INRIA, pour l’intérêt qu’il a porté à mon travail et pour ses compétences mathématiques précieuses. Je remercie tous les autres membres de l’équipe Calcul Formel pour leur bienveillance et pour m’avoir permis de leur présenter à plusieurs reprises mon travail.

J’ai eu la chance durant ces quatre années de pouvoir enseigner. Tout d’abord en tant que moniteur; Thierry Berger et le directeur du CIES, Michel Isingrini, se sont démenés pour m’obtenir un poste de moniteur : je leur en suis reconnaissant. Puis, en tant qu’ATER.

Je tiens à remercier tous les enseignants avec qui j’ai pu travailler durant ces quatre années. Ce fut un plaisir et j’ai appris beaucoup sur le métier d’enseignant. Dans l’ordre d’apparition : Pascale Sénéchaud qui fut ma tutrice pédagogique; Pierre Dusart; Philippe Ségalat avec qui enseigner fut très amusant; Samuel Maffre mon camarade de promotion et avec lequel je confrontais fréquemment mon point de vue; Thomas Lickteig qui a toujours pris en compte mes avis; Jacques-Arthur Weil qui a eu l’audace de me proposer des TP’s en DEA (Pierre-Louis Cayrel s’en souvient encore); Hakim Smati; Chazad Movaheddi; Driss Boularas, Marie-claude Malardeau, Thérèse Nore et Alain Salinier avec qui j’ai pris plaisir à enseigner le “M3”; Moulay Barkatou et Hassan Saoud avec qui j’ai enseigné en “FGSP”. Je remercie également Anne Bellido pour ses conseils pédagogiques.

J’ai passé quatre années agréables avec mes collègues de bureau. Je les remercie pour tous ces moments partagés ensemble. Samuel Maffre, Carmen Nedeloiaia et Abdallah Derbal, quand je fus au bureau du premier étage. Et depuis que j’ai pris la place de Philippe Ségalat au bureau du rez-de-chaussée, Mohammed Aït-Mansour, Julien Angeli, Laurent Dubreuil, Marius Duréa, Meriem Heraoua, Ali Mouhib, Ayoub Otmani, Hassan Saoud et le petit dernier Christophe Chabot. La dernière année, où j’ai pu partager avec Marius Duréa et Hassan Saoud ma passion du foot au grand dam de Julien Angeli, restera

gravée dans ma mémoire. Je remercie également les autres doctorants croisés durant ces années pour leur solidarité et leur bonne humeur : Ahmed Aït Moktar, Mohsen Ashgari, Guilhem Castagnos, Pierre-Louis Cayrel, Thomas Cluzeau, Hassan El Houari, Sandrine Jean, Matthieu Le Floc'h, Mikaël Lescop, Adrien Poteaux et Romain Validire. Je souhaite bonne chance aux nouveaux Elsa Bousquet et Daouada Diatta. Je remercie également Samir Adly, Alexandre Cabot, Abdelkader Necer et Stéphane Vinatier pour leur proximité avec les doctorants.

J'ai consacré une partie de mon temps à la vie associative de l'ADDMUL. Je remercie tous les membres de l'association pour les moments agréables passés durant ces quatre années. Je remercie tout particulièrement l'ancien président Samuel Maffre qui a pris à bras-le-corps l'association et Marc Rybowicz pour son soutien indéfectible à l'association et sa disponibilité, malgré ses activités d'enseignant-chercheur. Je remercie toutes les personnes de l'association ou du laboratoire qui ont participé aux matchs de foot bon enfant organisés par l'ADDMUL depuis deux ans et parmi les plus assidus : Samir Adly, Mohammed Aït-Mansour, Mohsen Ashgari, Moulay Barkatou, Pierre-Louis Cayrel, Thomas Cluzeau, Laurent Dubreuil, Marius Duréa, Hassan El Houari, Prokop Hybler, Mikaël Lescop, Théophane Lumineau, Samuel Maffre, Ali Mouhib, Adrien Poteaux, Marc Rybowicz, Hassan Saoud, Jacques-Arthur Weil ...

Je remercie enfin mes parents pour leur affection et leur soutien moral malgré la distance entre Limoges et ma Bretagne natale.



# Table des matières

Avant-propos	11
<b>I Calcul de séries formelles de systèmes d'équations aux dérivées partielles en un point régulier</b>	<b>13</b>
<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>1 Méthode de Newton pour une équation différentielle ordinaire</b>	<b>19</b>
1.1 Rappel de la méthode de Newton . . . . .	20
1.2 Méthode de Newton versus méthode par dérivations successives	23
1.2.1 Complexité de la méthode de Newton . . . . .	24
1.2.2 Complexité de la méthode par dérivations successives . .	27
1.3 Une version modulaire-remontée de Hensel . . . . .	29
1.3.1 Majoration explicite des coefficients de la série entière solution d'une EDO d'ordre 1 . . . . .	30
1.3.2 Stratégie de remontée . . . . .	33
<b>2 Computing Power Series Solutions of a Nonlinear PDE Sys- tem</b>	<b>35</b>
2.1 Introduction . . . . .	35
2.2 Nonlinear differential systems from an algebraic viewpoint . . .	37
2.3 Formal integrability . . . . .	38
2.3.1 Power series . . . . .	39
2.3.2 Power series solution . . . . .	39
2.3.3 Initial conditions and associated power series solution . .	40
2.4 Computing power series solutions . . . . .	42
2.4.1 Linear differential equations . . . . .	43
2.4.2 Linearisation . . . . .	44
2.4.3 Algorithm . . . . .	46
2.5 Experimental comparisons . . . . .	49
<b>Conclusion</b>	<b>53</b>

<b>II</b>	<b>Systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires avec singularités</b>	<b>55</b>
	<b>Introduction</b>	<b>57</b>
<b>3</b>	<b>Systèmes de Pfaff de première espèce</b>	<b>63</b>
3.1	Rappel du cas ordinaire . . . . .	66
3.1.1	Cas où $A_0$ possède un bon spectre . . . . .	66
3.1.2	Cas où $A_0$ ne possède pas un bon spectre . . . . .	67
3.2	Systèmes ayant un bon spectre . . . . .	69
3.3	Approche de Gérard et Levelt . . . . .	74
3.3.1	Décomposition de Dunford Généralisée . . . . .	76
3.3.2	Application aux systèmes de Pfaff de première espèce . . . . .	79
3.3.3	Version effective . . . . .	82
3.4	Approche de Takano et Yoshida . . . . .	86
3.4.1	Réduction relative et réduction forte . . . . .	87
3.4.2	Le procédé de réduction . . . . .	88
3.4.3	Calcul effectif du système $dZ = \left( \sum_{i=1}^n \frac{B^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Z$ . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Réduction du rang : cas ordinaire</b>	<b>95</b>
4.1	Travaux de Moser . . . . .	96
4.1.1	Résultats théoriques . . . . .	97
4.1.2	Algorithme de Moser . . . . .	97
4.2	Travaux de Gérard et Levelt . . . . .	100
4.2.1	Retour sur le langage des réseaux . . . . .	101
4.2.2	Critère de Gérard et Levelt . . . . .	102
4.2.3	Critère de Levelt . . . . .	102
4.2.4	Algorithme de Levelt : versions ascendante et descendante	103
4.2.5	Opérateur dual et dualité entre les versions ascendante et descendante . . . . .	105
4.3	Complexité des algorithmes de Moser et Levelt . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Réduction de rang : cas <math>n = 2</math></b>	<b>111</b>
5.1	Systèmes à singularité régulière . . . . .	115
5.1.1	Matrice fondamentale de solutions formelles . . . . .	116
5.1.2	Existence d'un réseau invariant . . . . .	117
5.1.3	Critère de van den Essen . . . . .	118
5.2	Construction des réseaux . . . . .	119
5.2.1	Saturation . . . . .	120
5.2.2	Contraction . . . . .	120
5.2.3	Réflexivité des contractés . . . . .	121
5.2.4	Condition de stationnarité des constructions . . . . .	121
5.2.5	Réflexif = libre pour $n = 2$ . . . . .	126
5.3	Algorithme de Levelt et réduction de rang . . . . .	128



5.3.1	Calcul effectif d'une base d'un contracté . . . . .	128
5.3.2	Description de l'algorithme . . . . .	130
<b>Conclusion</b>		<b>133</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>137</b>



# Avant-propos

Cette thèse traite du calcul exact de solutions formelles de systèmes d'équations aux dérivées partielles. Elle se divise en deux parties qui peuvent être lues indépendamment. Nous donnons ici un bref aperçu du travail que nous avons réalisé. Nous renvoyons le lecteur à l'introduction de chaque partie pour de plus amples détails.

**La première partie** concerne le calcul exact de séries formelles solutions d'une large classe de systèmes non linéaires d'équations aux dérivées partielles au voisinage d'un point régulier. Notre contribution est de proposer une alternative à la méthode par dérivation-évaluation en employant une méthode de type Newton [19, 31].

Nos principales contributions sont les suivantes.

## **Au Chapitre 1.**

Une version modulaire-remontée de Hensel de la méthode de Newton pour les équations différentielles ordinaires du premier ordre. Pour cela, nous obtenons une borne explicite sur les coefficients à calculer (Proposition 1.3.1).

## **Au Chapitre 2.**

L'extension de la méthode de Newton aux systèmes polynomiaux d'équations aux dérivées partielles appelés *systèmes différentiels réguliers*. Ce chapitre est la reproduction d'un article publié aux actes de la conférence ISSAC 2003 [43].

Une première implantation des algorithmes présentés dans cette partie a été faite dans le langage Maple.

**La seconde partie** concerne le calcul effectif de solutions formelles de systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles au voisinage de leur lieu singulier. Les systèmes considérés dans cette partie sont les systèmes de Pfaff complètement intégrables à croisements normaux.

Nos principales contributions sont les suivantes.

## **Au Chapitre 3.**

Des méthodes de calcul exact d'une base de solutions formelles lorsque le lieu singulier est de première espèce.

- La première méthode proposée suppose que le système est générique : c'est l'adaptation d'une méthode classique de calcul dans le cas différentiel ordinaire (paragraphe 3.2).
- Les deux autres méthodes s'affranchissent de cette hypothèse de généricité. Elles sont obtenues en rendant effectives les approches de R. Gérard et A.H.M. Levelt (paragraphe 3.3.3) et K. Takano et M. Yoshida (paragraphe 3.4.3).

#### **Au Chapitre 4.**

La mise en évidence de la dualité entre les versions descendantes et ascendantes de l'algorithme de Levelt (Corollaire 4.2.9).

Une étude de la complexité des algorithmes de Moser et de Levelt (paragraphe 4.3).

#### **Au Chapitre 5.**

Un algorithme **Réduction\_de\_rang** pour réduire la nature du lieu singulier d'un système de Pfaff dépendant de deux variables indépendantes. En particulier, cet algorithme permet de ramener tout système de Pfaff *régulier* en un système de Pfaff de première espèce. L'algorithme présenté dans ce chapitre est l'extension de la version descendante de l'algorithme de Levelt. Une partie de ce qui est présenté dans ce chapitre a fait l'objet d'une publication [11].

Ce qui apparaît nouveau par rapport à la version présentée dans [11] est la démonstration de résultats généraux sur les systèmes de Pfaff considérés sans restriction sur le nombre de variables indépendantes, notamment

- une propriété de réflexivité des constructions employées (Proposition 5.2.6) ;
- un critère de stationnarité des constructions (Théorème 5.2.10) : cela conduit à un nouveau critère de régularité des systèmes de Pfaff complètement intégrables à croisements normaux (Théorème 5.2.15).

Par ailleurs, la démonstration de la correction de l'algorithme diffère légèrement : nous avons préféré employer le Théorème 5.2.10 pour l'établir. Nous avons fait une première implantation de l'algorithme **Réduction\_de\_rang** dans le langage Maple.

## Première partie

### Calcul de séries formelles de systèmes d'équations aux dérivées partielles en un point régulier



# Introduction

Dans cette première partie, nous nous intéressons à une large classe de systèmes polynomiaux d'équations aux dérivées partielles, appelés *systèmes différentiels réguliers*, introduits dans [15, 16] et au calcul sous forme de séries formelles de leurs solutions vérifiant des conditions initiales prescrites en un point régulier.

Les systèmes différentiels réguliers jouent un rôle crucial dans la résolution d'un système polynomial d'équations aux dérivées partielles. En effet, il existe des algorithmes d'élimination différentielle permettant de ramener la résolution d'un tel système à la résolution de plusieurs *systèmes différentiels réguliers* [15, 16, 40]. Mentionnons que d'autres algorithmes existent et permettent de ramener la résolution à celle de systèmes autres que les systèmes différentiels réguliers (par exemple les systèmes sous forme rif [61, 65]).

Un système polynomial d'équations aux dérivées partielles peut ne pas avoir de solutions (cela se traduit par l'appartenance de l'équation  $1 = 0$  à l'idéal radical différentiel engendré par les équations du système). D'autres problèmes apparaissent comme l'indécidabilité de l'existence d'une série formelle solution, ou encore l'incalculabilité d'une série formelle (on peut exhiber des séries formelles solutions pour lesquelles il n'existe pas d'algorithme pour calculer les coefficients) [28]. Cela ne veut pas dire pour autant qu'on ne peut pas calculer des solutions sous forme de séries formelles. Il faut pour cela préciser le type de systèmes considérés et le type de solutions cherchées : les solutions doivent vérifier des conditions initiales prescrites qui garantissent l'existence et l'unicité de telles solutions sous forme de séries formelles. C'est précisément le cas avec le théorème de Cauchy-Kovalevska ou son extension par C. Riquier puis M. Janet à une classe plus large de systèmes d'équations aux dérivées partielles, appelés *systèmes orthonomes passifs* [62].

Pour les *systèmes différentiels réguliers*, il existe un théorème d'existence et d'unicité d'une série formelle solution [16]. Les conditions initiales que l'on impose alors sont appelées *conditions initiales régulières*. La démonstration de ce résultat d'existence et d'unicité est constructive et conduit à une méthode de calcul. L'idée consiste à dériver les équations et à les évaluer au point où la série formelle est développée. Cette méthode de calcul est employée dans la librairie diffalg de Maple [14]. Cette méthode par dérivation-évaluation s'avère néanmoins coûteuse en pratique.

Nous proposons une alternative à cette méthode de calcul donnant lieu à

une méthode de type Newton. Nous reprenons pour cela une idée présentée par R.P. Brent et H.T. Kung [19] puis K.O. Geddes [31] pour calculer la série formelle d'une équation différentielle implicite du premier ordre. L'idée consiste à linéariser le système d'équations aux dérivées partielles considéré le long d'une solution approchée (le système obtenu est appelé **système variationnel associé**). Contrairement au cas d'une équation différentielle ordinaire, le système variationnel associé peut ne pas avoir de solution. Néanmoins, nous montrons que l'erreur (c'est-à-dire la différence entre la solution et la solution approchée) est solution jusqu'à un certain ordre du système variationnel. En déterminant des relations de récurrence linéaires à partir du système variationnel, nous calculons une nouvelle solution approchée dont l'ordre d'approximation double à peu de chose près.

La première partie s'organise de la façon suivante.

Au premier chapitre, nous nous intéressons au cas d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Nous rappelons tout d'abord la méthode de Newton introduite par R.P. Brent et H.T. Kung [19], puis K.O. Geddes [31] pour calculer la série formelle solution d'une équation différentielle ordinaire (en général implicite) du premier ordre. Nous rappelons deux stratégies possibles pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Une première stratégie exploite l'expression d'une série formelle solution à l'aide d'opérations élémentaires sur les séries formelles : primitivation, inversion, composée à gauche par la série exp [19]. Cette stratégie s'avère efficace en terme d'opérations arithmétiques effectuées : le nombre d'opérations pour calculer les  $n$  premiers termes de la série formelle solution est en  $O(\mathcal{M}(n))$  (voir le chapitre 1 pour la définition de  $\mathcal{M}(n)$ ). Néanmoins, cette stratégie n'est plus valable pour un *système différentiel régulier*. Ce n'est que très récemment que cette première stratégie a été "adaptée" au cas d'une équation différentielle ordinaire d'ordre supérieur à 1 et aux systèmes différentiels ordinaires du premier ordre [39, 13].

La deuxième stratégie est basée sur le fait que les coefficients de la série formelle solution vérifient des relations de récurrence linéaires. Nous montrons qu'en employant cette stratégie, le nombre d'opérations arithmétiques est en  $O(n^2)$ .

Nous en profitons pour comparer la méthode de Newton où l'on emploie cette dernière stratégie, avec la méthode par dérivation-évaluation dans le cas d'une équation différentielle du premier ordre explicite et autonome. Ceci est l'ébauche d'une comparaison entre la méthode par dérivation-évaluation et la méthode de type Newton que nous proposons, pour calculer la série formelle solution d'un *système différentiel régulier*.

Nous terminons le chapitre en proposant une méthode de type Newton-Hensel pour tenir compte de la croissance des calculs intermédiaires. Elle consiste à appliquer une méthode de Newton modulaire, puis à remonter les



coefficients jusqu'à une borne déterminée au préalable. Cette borne est obtenue grâce à la méthode classique des séries majorantes.

Au dernier chapitre, nous présentons une méthode de type Newton pour calculer l'unique série formelle solution d'un *système différentiel régulier* vérifiant des *conditions initiales régulières*. Ce chapitre est la reproduction d'un article publié dans les actes de ISSAC 2003 [43].

Nous rappelons dans un premier temps, le cadre algébrique dans lequel on se place : définitions usuelles de l'algèbre différentielle, définition d'un système différentiel régulier ... Nous précisons ensuite la notion de solution d'un système différentiel régulier et nous redonnons de manière concise la démonstration du théorème d'existence et d'unicité d'une série formelle solution d'un système différentiel régulier.

Nous expliquons enfin comment calculer la série formelle solution d'un système différentiel régulier par une méthode de type Newton. Comme nous l'avons mentionné auparavant, l'idée consiste à linéariser le système différentiel régulier le long d'une solution approchée. La difficulté majeure est que l'on peut obtenir un système linéaire d'équations aux dérivées partielles sans solution.

Les deux résultats clés sont

- l'explicitation de la relation de récurrence linéaire associée à une équation aux dérivées partielles linéaire ;
- le fait que l'erreur entre la solution et la solution approchée vérifie le système variationnel associé jusqu'à un certain ordre.

Nous terminons ce chapitre en comparant sur quelques exemples le temps de calcul de notre algorithme (implanté dans le langage Maple) et celui des algorithmes par dérivation-évaluation existants.



# Chapitre 1

## Méthode de Newton pour une équation différentielle ordinaire

L'objectif de ce chapitre est de rappeler la méthode de Newton [19, 31, 39] pour calculer la série formelle solution d'une équation différentielle implicite du premier ordre. Soient  $\mathcal{K}$  un corps de caractéristique 0 et  $\mathcal{L}$  une extension de  $\mathcal{K}$ . On considère une équation différentielle de la forme

$$f(t, y, y') = 0 \text{ avec } f \in \mathcal{K}[[t - t_0]][u, v].$$

Étant donné  $(y_0, y_1) \in \mathcal{L}^2$  un couple de **conditions initiales régulières**, c'est-à-dire vérifiant

$$\begin{cases} f(t_0, y_0, y_1) = 0 \\ \frac{\partial f(t_0, y_0, y_1)}{\partial v} \neq 0 \end{cases}$$

il s'agit de calculer l'unique série formelle  $\bar{y} \in \mathcal{L}[[t - t_0]]$  vérifiant

$$f(t, \bar{y}, \bar{y}') = 0, \bar{y}(t_0) = y_0, \bar{y}'(t_0) = y_1. \quad (1.1)$$

La dernière condition portant sur  $(y_0, y_1)$  garantit l'existence et l'unicité d'une telle série formelle. Rappelons que la démonstration consiste à dériver successivement l'équation  $f(t, y, y') = 0$  par rapport à  $t$  et à évaluer l'équation obtenue en  $t = t_0$ . Ainsi en dérivant  $f(t, y, y') = 0$  une fois et en évaluant l'équation obtenue en  $t = t_0$ , on trouve  $\bar{y}''(t_0)$ . Cette démonstration conduit à une méthode de calcul qu'on appellera dans la suite la méthode par **dérivation-évaluation**. Il est communément admis que le coût en opérations arithmétiques dans  $\mathcal{L}$  de la méthode par dérivation-évaluation est prohibitif.

La méthode de Newton procède de manière différente. L'idée consiste à linéariser l'équation différentielle  $f(t, y, y') = 0$  le long d'une solution approchée  $z$  de la solution  $\bar{y}$ . Par solution approchée, on entend une série formelle  $z \in \mathcal{L}[[t]]$  vérifiant

$$z \equiv \bar{y} \pmod{t^\rho}, \text{ avec } \rho \geq 2.$$

L'entier  $\rho$  est appelé l'ordre d'approximation. Ainsi  $z = y_0 + y_1 t$  est une solution approchée à l'ordre 2 de la solution  $\bar{y}$ . En résolvant cette équation linéarisée

(on parlera d'**équation variationnelle** dans la suite), on obtient une nouvelle solution dont l'ordre d'approximation a grosso modo doublé (Proposition 1.1.1).

Le principe sous-jacent à la méthode de Newton (c'est-à-dire linéariser l'équation) s'est montré fécond en calcul formel. Il s'applique pour les opérations élémentaires usuelles sur les séries formelles, par exemple l'inversion de série, ou encore la composition à gauche de la série exp avec une série formelle et conduit à des algorithmes rapides de calcul de telles séries [19, 77, 12].

Le chapitre se divise comme suit.

Au paragraphe 1.1, nous rappelons brièvement la méthode de Newton. Nous décrivons deux stratégies pour résoudre l'équation variationnelle. La première stratégie est celle que nous emploierons dans le cas des *systèmes différentiels réguliers* au prochain chapitre. La deuxième stratégie est celle employée dans la littérature [19, 31, 39, 13]. Elle consiste à ramener le calcul de la série solution du linéarisé à des opérations élémentaires sur les séries formelles. Cette stratégie s'avère meilleure en terme d'opérations arithmétiques dans  $\mathcal{L}$ , mais n'est plus valable pour un système différentiel régulier (cette stratégie a été étendue récemment aux équations différentielles d'ordre supérieur et aux systèmes différentiels ordinaires du premier ordre [39, 13]).

Au paragraphe 1.2, nous comparons la complexité en opérations arithmétiques dans  $\mathcal{L}$  de la méthode de Newton, où l'on emploie la première stratégie, avec la méthode par dérivation-évaluation. Nous nous restreignons dans cette étude au cas des équations explicites autonomes.

Nous terminons le chapitre en proposant une méthode de calcul basée sur une méthode de Newton modulaire et des remontées de type Hensel, pour tenir compte de l'explosion des coefficients. Nous obtenons pour cela une borne explicite sur la taille des coefficients à calculer en employant la méthode classique des séries majorantes.

## 1.1 Rappel de la méthode de Newton

Nous rappelons brièvement la méthode de Newton. Pour plus de détails, nous renvoyons à [19, 31]. On suppose ici que  $f \in \mathcal{K}[[t]][u, v]$ . Soient  $\mathcal{L}$  une extension de  $\mathcal{K}$  et  $(y_0, y_1) \in \mathcal{L}^2$  vérifiant

$$f(0, y_0, y_1) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(0, y_0, y_1) \neq 0.$$

Il existe alors une unique série formelle  $\bar{y} \in \mathcal{L}[[t]]$  vérifiant

$$\begin{cases} f(t, \bar{y}, \bar{y}') = 0 \\ \bar{y}(0) = y_0 \\ \bar{y}'(0) = y_1 \end{cases}$$

Il s'agit de calculer les  $n$  premiers coefficients de la série  $\bar{y}$  ou de manière équivalente  $\bar{y} \bmod t^n$ , la série  $\bar{y}$  tronquée à l'ordre  $n$ . La méthode de Newton

repose sur l'observation suivante, qu'on obtient en appliquant la formule de Taylor.

**Proposition 1.1.1 ([31])**

Soit  $z \in \mathcal{L}[[t]]$  vérifiant  $z \equiv \bar{y} \pmod{t^k}$ , avec  $k \geq 2$ .

Il existe alors une unique solution  $\bar{e} \in \mathcal{L}[[t]]$  de l'équation différentielle

$$\frac{\partial f}{\partial v}(t, z, z')e' + \frac{\partial f}{\partial u}(t, z, z')e = -f(t, z, z'), \quad (1.2)$$

vérifiant  $e(0) = 0$ .

De plus, la série  $z + \bar{e}$  vérifie

$$z + \bar{e} \equiv \bar{y} \pmod{t^{2k-1}}.$$

**Remarque 1.1.2**

Si le degré en  $v$   $\deg_v(f) = 1$ , la série  $z + \bar{e}$  vérifie alors

$$z + \bar{e} \equiv \bar{y} \pmod{t^{2k}}.$$

Si  $f$  est explicite, c'est-à-dire  $f$  s'écrit  $f(t, u, v) = v - g(t, u)$  avec  $g(t, u) \in \mathcal{K}[[t]][u]$ , alors

$$z + \bar{e} \equiv \bar{y} \pmod{t^{2k+1}}.$$

Dans ces deux situations,  $y_0$  détermine entièrement  $y_1$  et on peut donc remplacer  $k \geq 2$  par  $k \geq 1$  dans la proposition précédente.

L'équation (1.2) s'appelle l'équation variationnelle de  $f(t, y, y') = 0$  en la solution approchée  $z$ . On la note  $L_z(f)(t, e, e') = 0$  dans la suite. D'après la Proposition 1.1.1, si l'on connaît les  $k$  ( $k \geq 2$ ) premiers coefficients de  $\bar{y}$ , c'est-à-dire  $\bar{y} \pmod{t^k}$ , alors on peut déterminer les  $k - 1$  coefficients suivants en calculant les  $2k - 1$  premiers coefficients de l'unique solution  $\bar{e}$  de

$$L_{\bar{y} \pmod{t^k}}(f)(t, e, e') = 0, e(0) = 0.$$

Les  $k$  premiers coefficients  $\bar{e}_i, 0 \leq i \leq k - 1$  sont alors nuls et on a

$$\bar{e}_i = \bar{y}_i, k \leq i \leq 2k - 2.$$

La méthode de Newton est alors la suivante. On pose  $z := y_0 + y_1 t$ . C'est une approximation à l'ordre  $k = 2$  de la solution. On itère alors ce qui suit jusqu'à ce que  $k$  soit plus grand que  $n$  ( $n$  étant le nombre de coefficients qu'on souhaite calculer).

- Calculer  $\bar{e} \pmod{t^{2k-1}}$  où  $\bar{e}$  vérifie

$$L_z(f)(t, e, e') = 0 \text{ avec } e(0) = 0.$$

- Remplacer alors  $z$  par  $z + (\bar{e} \pmod{t^{2k-1}})$  et  $k$  par  $2k - 1$ .

Le  $z$  final vérifie alors  $z \equiv \bar{y} \pmod{x^n}$ . En fait  $z$  vérifie alors  $z = \bar{y} \pmod{t^{k^*}}$  où  $k^* = 2^{\lceil \log_2(n-1) \rceil} + 1$  ( $\log_2$  est le logarithme en base 2).

**Remarque 1.1.3**

Dans le cas où  $\deg_v(f) = 1$ , on peut remplacer  $2k - 1$  par  $2k$ . Quand  $f$  est explicite,  $2k - 1$  par  $2k + 1$ .

Nous n'avons pas expliqué comment calculer  $\bar{e} \pmod{t^{2k-1}}$ . Deux stratégies sont possibles.

**Première stratégie** Elle consiste à injecter la série  $\bar{e} = \sum \bar{e}_i t^i$  dans l'équation

$$L_z(t, e, e') = 0.$$

Par identification, on obtient des relations de récurrence linéaires sur les coefficients  $\bar{e}_i$ . Ce qui permet de calculer  $\bar{e}_i, 0 \leq i \leq 2k - 2$ .

On peut faire deux observations pour éviter des calculs superflus.

(i) On a mentionné auparavant que  $\bar{e}_i = 0, 0 \leq i \leq k - 1$ . Il suffit donc d'injecter la série  $\sum_{i \geq k} \bar{e}_i t^i$ .

(ii) On peut remplacer l'équation variationnelle  $L_z(t, e, e') = 0$  par l'équation

$$a(t)e' + b(t)e = c(t), \tag{1.3}$$

où  $a(t) = f_v(t, z, z') \pmod{t^{2k-2}}, b(t) = f_u(t, z, z') \pmod{t^{2k-2}}$  et  $c(t) = -(f(t, z, z') \pmod{t^{2k-2}})$ .

On peut raffiner encore, en tenant compte de la première observation et prendre  $a(t) = f_v(t, z, z') \pmod{t^{k-1}}$  et  $b(t) = f_u(t, z, z') \pmod{t^{k-2}}$  (on peut tronquer un peu plus si  $\deg_v(f) = 1$  ou si  $f$  est explicite).

Dans les deux cas,  $z + (\bar{e} \pmod{t^{2k-1}})$ , où  $\bar{e}$  est la solution de l'équation (1.3) avec  $\bar{e}(0) = 0$ , vérifie

$$z + (\bar{e} \pmod{t^{2k-1}}) = \bar{y} \pmod{t^{2k-1}}.$$

Si  $f$  est explicite, nous montrons que le nombre d'opérations arithmétiques ( $+, \times, \div$ ) sur le corps  $\mathcal{L}$  pour calculer les  $n$  premiers coefficients de  $\bar{y}$  en employant cette stratégie, est en  $O(n^2)$  (Proposition 1.2.2).

**Deuxième stratégie** Celle-ci s'avère meilleure en terme d'opérations arithmétiques : le nombre d'opérations arithmétiques en employant cette stratégie est en  $O(\mathcal{M}(n))$ .  $\mathcal{M}(n)$  désigne le nombre d'opérations arithmétiques nécessaires pour calculer les  $n$  premiers coefficients du produit  $h = fg$  de deux séries formelles  $f, g \in \mathcal{L}[[t]]$ . Le gain varie alors selon la méthode employée pour calculer le produit de deux séries formelles.

- La méthode classique, dite *naïve* qui consiste à écrire  $h_i = f_0 g_i + f_1 g_{i-1} + \dots + f_i g_0$  conduit à un coût en  $O(n^2)$ .

- La méthode de Karatsuba conduit à un coût en  $O(n^{\log_2(3)})$  [77].
- La transformée de Fourier rapide (FFT), si celle-ci est applicable dans  $\mathcal{L}$  conduit à un coût en  $O(n \log(n))$  [77].

La stratégie repose sur l'expression explicite de la solution  $\bar{e}$  de l'équation (1.3). Celle-ci est égale à

$$\bar{e} = \left( \int c(t)g(t)/a(t)dt \right) / g(t)$$

où  $g(t) = \exp(\int b(t)/a(t)dt)$ .

Pour calculer  $\bar{e} \bmod t^{2k-1}$  grâce à la formule ci-dessus, on doit employer des algorithmes de calcul d'inverse de série (on doit calculer l'inverse de  $a(t)$  et  $g(t)$ ) et de composition de la série  $\exp$  avec une série de valuation positive (on doit calculer  $\exp(\int b(t)/a(t)dt)$ ), outre le calcul de primitives (le calcul des  $n$  premiers termes d'une primitive coûte  $n - 1$  opérations sur  $\mathcal{L}$ ).

Comme nous l'avons mentionné en introduction, il existe des algorithmes rapides du type méthode de Newton pour calculer les  $n$  premiers coefficients de l'inverse de série ou ceux d'une série de la forme  $\exp(s)$  (voir [19, 77, 12] pour de plus amples détails). Le coût de ces algorithmes en opérations arithmétiques est en  $O(\mathcal{M}(n))$ . Par conséquent calculer  $\bar{e} \bmod t^{2k-1}$  coûte  $O(\mathcal{M}(2k - 1))$  opérations arithmétiques. Le calcul de  $a(t), b(t), c(t)$  modulo  $t^{2k-1}$  revenant essentiellement à multiplier des séries, le coût pour passer de  $\bar{y} \bmod t^k$  à  $\bar{y} \bmod t^{2k-1}$  est donc en  $O(\mathcal{M}(2k - 1))$  (la constante cachée ici dépend uniquement du degré total de  $f$  en  $u$  et  $v$ ).

Le coût total pour calculer  $\bar{y} \bmod t^n$  en employant cette stratégie est alors

$$O(\mathcal{M}(3)) + \dots + O(\mathcal{M}(2^l + 1)) + \dots + O(\mathcal{M}(2^{\lceil \log_2(n-1) \rceil} + 1)).$$

Le nombre total d'opérations arithmétiques est alors en  $O(\mathcal{M}(n))$ , sous l'hypothèse que  $\mathcal{M}(n)$  vérifie les deux propriétés suivantes (voir [19]) :

- $\mathcal{M}(n)/n$  est croissante ;
- $\mathcal{M}(2^{\lceil \log_2(n) \rceil})/\mathcal{M}(n)$  est borné.

Remarquons que ces deux propriétés sont vérifiées pour  $\mathcal{M}(n) = n^2$ ,  $\mathcal{M}(n) = n^{\log_2(3)}$  ou encore  $\mathcal{M}(n) = n \log(n)$ .

Nous supposons dorénavant que  $\mathcal{M}(n)$  vérifie les deux propriétés ci-dessus.

## 1.2 Méthode de Newton versus méthode par dérivations successives

Nous supposons dans ce paragraphe que l'équation est **explicite**.

On a donc  $f = v - g(t, u)$ , où  $g(t, u) \in \mathcal{K}[[t]][u]$  et l'équation devient  $y' = g(t, y)$ . Soit  $d$  le degré en  $u$  de  $g$ , on écrit  $g$  sous la forme

$$g(t, u) = a_0(t) + a_1(t)u + \dots + a_d(t)u^d, \text{ où } a_i \in \mathcal{K}[[t]], 0 \leq i \leq d.$$

Étant donné  $y_0 \in \mathcal{L}$ , la série  $\bar{y} \in \mathcal{L}[[t]]$  est l'unique solution de l'équation différentielle

$$y' = g(t, y), y(0) = y_0.$$

Dans ce paragraphe, nous comparons la méthode de Newton et la méthode par dérivation-évaluation en nombre d'opérations arithmétiques. L'étude faite ici est un premier pas vers une comparaison des deux méthodes dans une situation plus générale, notamment celle du prochain chapitre.

Pour la méthode de Newton, nous donnons le nombre d'opérations arithmétiques dans  $\mathcal{L}$  lorsqu'on emploie la première stratégie pour calculer la série solution d'une équation différentielle linéaire : on calcule la série grâce aux relations de récurrence linéaires vérifiées par ses coefficients. Le nombre d'opérations arithmétiques pour calculer  $\bar{y} \bmod t^n$  est alors en  $O(n^2)$ .

Pour la méthode par dérivation-évaluation, nous supposons que l'équation est autonome. Autrement dit

$$a_i \in \mathcal{K}, 0 \leq i \leq d.$$

Nous montrons que sous cette hypothèse, le nombre d'opérations arithmétiques pour calculer  $\bar{y} \bmod t^n$  est en  $O(n^3)$ .

### 1.2.1 Complexité de la méthode de Newton

Nous posons  $\bar{y} = \sum_{n \geq 0} y_n t^n$ . Soit  $z_k$  la solution approchée de  $\bar{y}$  obtenue à la  $k^{\text{ième}}$  étape de la méthode de Newton. A l'étape 0, on a  $z_0 = y_0$ . A l'étape  $k \geq 1$ , on calcule  $z_k$  en déterminant la solution  $\bar{e}$  de l'équation variationnelle  $L_{z_{k-1}}(f)(e, e') = 0, e(0) = 0$ . On calcule  $\bar{e}$  en résolvant les relations de récurrence linéaires vérifiées par les coefficients de  $\bar{e}$ .

Bien qu'on fasse mieux dans le cas d'une équation explicite (voir Remarque 1.1.3), nous supposons, pour simplifier l'étude, que le nombre exact de coefficients calculés double à chaque étape. Par conséquent, nous supposons que  $z_k$  vérifie

$$z_k = \bar{y} \bmod t^{2^k}, \text{ pour tout } k \geq 0.$$

Autrement dit, nous ne tenons pas compte des termes de  $z_k$  d'ordre supérieur ou égal à  $2^k$  qui coïncident avec ceux de  $\bar{y}$ . Sous cette restriction, le nombre d'étapes dans la méthode de Newton est donc égal à  $\lceil \log_2(n) \rceil$ .

On pose  $\frac{\partial g}{\partial u}(t, \bar{y}) = \sum_{i \geq 0} \beta_i t^i$  et pour tout  $k \geq 0$ ,

$$g(t, z_k) - z'_k = \sum_{i \geq 0} \gamma_{i,k} t^i.$$

#### Remarque 1.2.1

Puisque  $z_k$  vérifie  $z_k = \bar{y} \bmod t^{2^k}$ , on a :

$$-\frac{\partial g}{\partial u}(t, z_k) \equiv \sum_{i=0}^{2^k-1} \beta_i t^i \bmod t^{2^k};$$



$$-g(t, z_k) - z'_k \equiv 0 \pmod{t^{2^k-1}}.$$

En particulier,  $\gamma_{i,k} = 0$  si  $0 \leq i < 2^k - 1$ , et pour  $i \geq 2^k - 1$ ,  $\gamma_{i,k}$  est égal au coefficient en  $t^i$  dans  $h(t) = g(t, z_k)$ .

**Proposition 1.2.2**

Le calcul de  $\bar{y} \pmod{t^n}$  par la méthode de Newton, en utilisant la première stratégie, nécessite au plus  $(4/3)n^2 + O(\mathcal{M}(n))$  opérations arithmétiques dans  $\mathcal{L}$ . En particulier si  $\mathcal{M}(n) = O(n^2)$ , le nombre d'opérations arithmétiques est en  $O(n^2)$ .

**Démonstration.** Comme nous l'avons dit, le nombre d'étapes dans la méthode de Newton est égal à  $\lceil \log_2(n) \rceil$ . Pour déterminer le nombre d'opérations total, il suffit de déterminer le nombre d'opérations arithmétiques faites à la chaque étape. Or la  $k^{\text{ième}}$  étape pour  $1 \leq k \leq \lceil \log_2(n) \rceil$ , se divise en deux temps.

Dans un premier temps, il faut calculer les coefficients de l'équation variationnelle  $L_{z_{k-1}}(f)(e, e') = 0$ . En tenant compte de l'observation (ii) (voir paragraphe 1.1), on peut remplacer l'équation variationnelle par l'équation différentielle

$$e' - \left( \sum_{\ell=0}^{2^{k-1}-1} \beta_\ell t^\ell \right) e = \sum_{\ell=0}^{2^k-1} \gamma_{\ell, k-1} t^\ell. \quad (1.4)$$

D'après la remarque précédente, les coefficients sont donnés par

$$b(t) = -\frac{\partial g}{\partial u}(t, z_{k-1}) \pmod{t^{2^k-1}},$$

$$c(t) = \sum_{i=2^{k-1}-1}^{2^k-1} h_i t^i.$$

Il suffit donc de calculer  $\frac{\partial g}{\partial u}(t, z_{k-1}) \pmod{t^{2^k-1}}$  et  $g(t, z_{k-1}) \pmod{t^{2^k}}$ . Ces deux calculs font intervenir un nombre fini de produits de séries et d'addition de séries (l'addition de deux séries nécessite ici  $2^k$  additions dans  $\mathcal{L}$ ). Par conséquent leur coût en opérations arithmétiques est en  $O(\mathcal{M}(2^k))$  (on utilise ici  $2^k \leq \mathcal{M}(2^k)$  et  $\mathcal{M}(2^{k-1}) \leq \mathcal{M}(2^k)/2$ ).

Dans un second temps, on doit calculer les  $2^k$  premiers coefficients de la série formelle  $\bar{e} = \sum_{\ell \geq 0} e_\ell t^\ell \in \mathcal{L}[[t]]$  solution de

$$e' - \left( \sum_{\ell=0}^{2^{k-1}-1} \beta_\ell t^\ell \right) e = \sum_{\ell=0}^{2^k-1} \gamma_{\ell, k-1} t^\ell, \quad e(0) = 0.$$

Par construction, on a

$$e_\ell = 0 \text{ si } 0 \leq \ell < 2^{k-1} \text{ et } e_\ell = y_\ell \text{ si } 2^{k-1} \leq \ell < 2^k.$$

Par conséquent en injectant la série formelle  $\bar{e}$  dans l'équation différentielle (1.4) et en identifiant les coefficients, on obtient les relations de récurrence suivantes portant sur les  $y_\ell$  pour  $2^{k-1} \leq \ell < 2^k$  :

$$\ell y_\ell = \sum_{j=2^{k-1}}^{\ell-1} \beta_{\ell-1-j} y_j + \gamma_{\ell-1, k-1}.$$

Le calcul de  $y_\ell$  pour  $2^{k-1} \leq \ell < 2^k$  nécessite alors :

- $\ell - 2^{k-1}$  multiplications dans  $\mathcal{L}$  ;
- $\ell - 2^{k-1}$  additions dans  $\mathcal{L}$  ;
- une division par un entier.

Le calcul des  $y_\ell$  nécessite donc au total :

- $(2^{k-1} - 1)2^{k-2}$  multiplications dans  $\mathcal{L}$  ;
- $(2^{k-1} - 1)2^{k-2}$  additions dans  $\mathcal{L}$  ;
- $2^{k-1}$  divisions par un entier.

Le nombre d'opérations arithmétiques lors de la  $k^{\text{ième}}$  étape est donc borné par

$$(2^{k-1} - 1)2^{k-1} + 2^{k-1} + O(\mathcal{M}(2^k)).$$

Par conséquent, le nombre total d'opérations arithmétiques est borné par

$$\sum_{k=1}^{\lceil \log_2(n) \rceil} ((2^{k-1} - 1)2^{k-1} + 2^{k-1} + O(\mathcal{M}(2^k))).$$

Or  $\mathcal{M}(2^k) \leq \mathcal{M}(2^{\lceil \log_2(n) \rceil})/2^{\lceil \log_2(n) \rceil - k}$  donc la précédente somme est bornée par

$$(4^{\lceil \log_2(n) \rceil} - 1)/3 + O(\mathcal{M}(2^{\lceil \log_2(n) \rceil})).$$

Le nombre d'opérations arithmétiques dans  $\mathcal{L}$  est donc borné par

$$(4/3)n^2 + O(\mathcal{M}(n)).$$

□

Comme nous venons de le voir, la résolution des relations de récurrence pour résoudre l'équation variationnelle à chaque étape de la méthode de Newton, donne la contribution en  $O(n^2)$  dans le nombre d'opérations arithmétiques. De plus si aucun des  $\beta_n$  n'est nul, le nombre d'opérations arithmétiques est dans cet ordre de grandeur.

Nous donnons ici un exemple où aucun des  $\beta_n$  n'est nul. On pourra remarquer dans le même temps que les coefficients de la série solution sont très simples. En d'autres termes, l'exemple qui suit montre que les relations de récurrence obtenues en employant la méthode de Newton peuvent être horriblement compliquées alors même que les coefficients de la série solution sont simples.

**Exemple 1.2.3**

On prend  $g(t, u) = u^d$ . La solution de  $y' = y^d$  avec  $y(0) = y_0$  est

$$\bar{y}(t) = y_0 \sqrt[d-1]{\frac{1}{1 - (d-1)y_0^{d-1}t}}.$$

On a donc

$$\frac{\partial g}{\partial u}(\bar{y}) = \frac{d y_0^{d-1}}{1 - (d-1)y_0^{d-1}t} = \sum_{n \geq 0} d(d-1)^n y_0^{(d-1)(n+1)} t^n.$$

Par conséquent  $\beta_n = d(d-1)^n y_0^{(d-1)(n+1)}$ .

D'une façon générale  $\beta_n$  est un polynôme en  $y_0$  et les  $a_i$ . Si de plus l'équation est autonome,  $\beta_n$  est de degré  $(d-1)(n+1)$  en  $y_0$  et un polynôme homogène de degré  $n$  en les  $a_i$ .

**1.2.2 Complexité de la méthode par dérivations successives**

Nous supposons ici que l'équation  $y' = g(y)$  est autonome. Par conséquent,  $g(u) = a_0 + \dots + a_d u^d \in \mathcal{K}[u]$ . On note  $\bar{y} = \sum y_i t^i$  l'unique série formelle solution de l'équation différentielle

$$y' = g(y), y(0) = y_0 \in \mathcal{L}.$$

La méthode par dérivation-évaluation pour calculer  $\bar{y} \bmod t^n$  revient à procéder de la façon suivante.

- On pose  $P(u) := g(u)$  et  $y_1 := P(y_0)$ .
- **Pour**  $i = 2, \dots, n-1$  **faire**
- $P(u) := g(u) \frac{\partial P}{\partial u}(u)$ .
- $y_i := \frac{P(y_0)}{i!}$ .
- **Fin Pour.**
- RETOURNER  $\sum_{i=0}^{n-1} y_i t^i$ .

**Remarque 1.2.4**

En anticipant sur le prochain chapitre, on pourra noter que non seulement on dérive successivement  $y' = g(y)$  (à peu près autant de fois que le nombre de coefficients à calculer), mais en plus on réduit l'équation obtenue par rapport à l'équation  $y' = g(y)$ . Ce qui revient essentiellement à remplacer  $y'$  par  $g(y)$ .

On définit par récurrence, une suite  $(P_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $\mathbb{Q}[a_0, \dots, a_d, u]$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} P_0(u) &= u; \\ P_{n+1}(u) &= g(u) \frac{\partial P_n}{\partial u}(u). \end{aligned}$$

Cette suite correspond aux valeurs successives de  $P$  dans la méthode par dérivation-évaluation donnée ci-dessus. En procédant par récurrence, on peut montrer que pour tout  $n \geq 0$ ,

$$y^{(n)} = P_n(y).$$

En particulier, on a  $y_n = P_n(y_0)/n!$  pour tout  $n \geq 0$ . Ce qui montre que l'on calcule effectivement  $\bar{y} \pmod{t^n}$ .

**Proposition 1.2.5**

*Sous l'hypothèse que  $y' = g(y)$  est autonome, le calcul de  $\bar{y}$  par la méthode par dérivation-évaluation nécessite au plus  $O(n^3)$  opérations arithmétiques dans  $\mathcal{L}$ . Plus précisément le nombre de multiplications est un  $O(n^2)$ , le nombre d'additions est un  $O(n^3)$  et le nombre de divisions est égal à  $n$ .*

**Démonstration.** Le calcul de  $y_1$  s'obtient en évaluant  $g(u)$  en  $u = y_0$ . En employant la méthode d'Horner, cela coûte  $2d$  opérations arithmétiques ( $d$  additions et  $d$  multiplications).

Il reste à évaluer le nombre d'opérations arithmétiques pour calculer  $y_{k+1}$  pour  $1 \leq k \leq n - 2$ . On obtient  $y_{k+1}$  en calculant dans un premier temps  $P_{k+1}(u)$  puis en l'évaluant en  $u = y_0$ .

Un raisonnement par récurrence montre que  $\deg(P_k) = (k + 1)(d - 1) + 1$ . On note  $d_k = \deg_u(P_k)$  et on pose

$$P_k(u) = a_0^{(k)} + \dots + a_{d_k}^{(k)} u^{d_k}.$$

Supposons que  $y_0, \dots, y_k$  aient été calculés. Cela suppose que  $P_k(u)$  ait déjà été calculé. Soit  $L_k$  le nombre d'opérations arithmétiques que ces calculs nécessitent.

**calcul de  $P_{k+1}(u)$**  Pour calculer  $P_{k+1}(u)$ , il faut calculer  $Q_k(u) = \frac{\partial P_k}{\partial u}(u)$  et multiplier  $Q_k(u)$  par  $g(u)$ . Comme  $Q_k(u) = a_1^{(k)} + 2a_2^{(k)}u + \dots + d_k a_{d_k}^{(k)}u^{d_k-1}$ , calculer  $Q_k(u)$  nécessite  $d_k(d_k - 1)/2$  additions dans  $\mathcal{K}$ .

On note  $b_\ell, 0 \leq \ell \leq d_k - 1$ , les coefficients de  $Q_k$ . On a alors :

$$a_\ell^{(k+1)} = \sum_{j=\max(0, \ell-d_k+1)}^{\min(d, \ell)} a_j b_{\ell-j}, \quad 0 \leq \ell \leq d_{k+1}.$$

Par conséquent on a les 3 cas de figure suivants pour  $k \geq 1$ .

- Si  $d_k \leq \ell \leq d_{k+1}$ , le calcul de  $a_\ell^{(k+1)}$  nécessite  $d + d_k - \ell - 1$  additions (resp  $d + d_k - \ell$  multiplications).
- Si  $d \leq \ell < d_k$ , le calcul de  $a_\ell^{(k+1)}$  nécessite  $d$  additions (resp  $d + 1$  multiplications).
- Si  $\ell < d$ , le calcul de  $a_\ell^{(k+1)}$  nécessite  $\ell$  additions (resp  $\ell + 1$  multiplications).

Le calcul de  $Q_k(y) f(y)$  nécessite donc

- $(k+1)d(d-1)$  additions ;
- $(k+1)d(d-1) + d_{k+1} + 1$  multiplications,

soit  $2(k+1)d(d-1) + d_{k+1} + 1$  opérations arithmétiques dans  $\mathcal{K}$ .

Pour calculer  $P_{k+1}(u)$  on fait donc :

- $(\frac{(k+1)(d-1)+1}{2} + d)(k+1)(d-1) = O((k+1)^2)$  additions ;
- $(k+1)d(d-1) + (k+2)(d-1) + 2 = O(k+1)$  multiplications.

**calcul de  $y_{k+1}$**  Pour calculer  $y_{k+1}$ , on évalue  $P_{k+1}(u)$  en  $u = y_0$  par la méthode d'Horner. Le degré de  $P_{k+1}$  étant linéaire en  $k+1$ , cette évaluation nécessite  $O(k+1)$  additions et  $O(k+1)$  multiplications.

On en déduit que  $L_{k+1} = L_k + O((k+1)^2)$ . D'où la complexité totale annoncée.

□

## 1.3 Une version modulaire-remontée de Hensel

Nous proposons ici une variante basée sur des calculs modulaires et des remontées de Hensel. Ce travail en collaboration avec E. Hubert a fait l'objet d'un exposé au Rhine Workshop in Computer Algebra (RWCA) qui s'est déroulé en mars 2003 à Nijmegen (Pays-Bas). On se propose de calculer les  $n$  premiers coefficients de la série solution  $\bar{y} = \sum \bar{y}_k t^k$  d'une équation différentielle

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

où  $f \in \mathbb{Z}[t, y]$  et  $y_0 \in \mathbb{Z}$ . Du fait de l'hypothèse,  $\bar{y} \in \mathbb{Q}[[t]]$ . Plus précisément, en écrivant pour tout  $k \geq 0$ ,  $\bar{y}_k = \frac{y_k}{k!}$ , on a  $y_k \in \mathbb{Z}$ .

On choisit un nombre premier  $p$  plus grand que le nombre de coefficients à calculer afin de pouvoir réduire modulo  $p$  les  $n$  premiers coefficients  $\bar{y}_k$ ,  $0 \leq k \leq n-1$  : le dénominateur de  $\bar{y}_k$  est alors inversible modulo  $p$ .

L'idée consiste à calculer dans un premier temps  $\bar{y} \pmod{(p, t^n)}$ . Pour cela, on applique le schéma de la méthode de Newton, à ceci près que tous les calculs se font modulo  $p$ . Ainsi toutes les divisions intervenant (ce sont ici des divisions par les entiers  $1 \leq k < n$ ) se font modulo  $p$ . Il est évident qu'en procédant de cette façon, on ne calcule qu'une seule série tronquée à l'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  : c'est précisément  $\bar{y} \pmod{(p, t^n)}$ .

Ceci fait, on "remonte" les calculs jusqu'à obtenir  $\bar{y} \pmod{(p^N, t^n)}$  pour un  $N$  assez grand. Ce  $N$  assez grand s'obtient grâce à une borne sur les coefficients

que nous obtenons en employant la méthode classique des séries majorantes. La Proposition 1.3.5 nous permet d'obtenir la borne suivante sur les entiers  $y_k$ .

**Proposition 1.3.1**

Soit  $\bar{y} = \sum_{k \geq 0} \frac{y_k}{k!} t^k \in \mathbb{C}[[t]]$  la série formelle solution de

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

où  $f \in \mathbb{C}[t, y]$  et  $y_0 \in \mathbb{C}$ .

On pose  $M = \sup_{|t| \leq 1, |y| \leq 1} |f(t, y + y_0)|$ . On a alors

$$|y_k| \leq \frac{3(n-1)!}{(1 - \exp(-\frac{1}{2M}))^{n-1}}, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Notons  $B_n$  la borne obtenue. Pour pouvoir reconstruire les entiers  $y_k$  pour  $1 \leq k \leq n-1$ , il suffit de calculer  $\bar{y} \bmod (p^N, t^n)$ , avec  $p^N > 2B_n$ .

**1.3.1 Majoration explicite des coefficients de la série entière solution d'une EDO d'ordre 1**

Il est connu que si  $f(t, y)$  est une fonction analytique sur un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^2$  et si  $(t_0, y_0) \in \Omega$ , alors la solution  $\bar{y}$  de l'équation différentielle  $y' = f(t, y)$  avec  $y(t_0) = y_0$  est elle-même analytique.

Plus précisément, étant donné  $r > 0$  tel que  $D(t_0, r) \times D(y_0, r) \subseteq \Omega$ , la méthode des séries majorantes [21] permet de montrer que le rayon de convergence de la série formelle  $\bar{y} = \sum \bar{y}_n (t - t_0)^n$  solution du problème de Cauchy ci-dessus est strictement positif (supérieur ou égal à  $r$  dans le cas linéaire).

L'objectif ici est de donner une majoration des  $n$  premiers coefficients de la série solution à l'aide de la méthode des séries majorantes.

**Méthode des séries majorantes** Rappelons tout d'abord la définition d'une série majorante d'une série formelle multivariée.

Étant donné  $y \in \mathbb{C}[[t_1, \dots, t_n]]$ , on écrit  $y = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} y_\alpha t^\alpha$ .

**Définition 1.3.2**

Soient  $n \geq 1$  un entier et  $\bar{y}, \tilde{y} \in \mathbb{C}[[t_1, \dots, t_n]]$ .  $\tilde{y}$  est une **série majorante** de  $\bar{y}$  si pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\bar{y}_\alpha| \leq \tilde{y}_\alpha$ .

Le lemme qui suit est fondamental. Nous renvoyons à [21] pour la démonstration.

**Lemme 1.3.3**

Soient  $f, \Phi \in \mathbb{C}[[t, y]]$ . Soit  $\bar{y} \in \mathbb{C}[[t]]$  (resp.  $\tilde{y}$ ) la solution de l'équation différentielle  $y' = f(t, y), y(0) = 0$  (resp. la solution de  $y' = \Phi(t, y), y(0) = 0$ ). Si  $\Phi$  est une série majorante de  $f$  alors  $\tilde{y}$  est une série majorante de  $\bar{y}$ .

Nous allons exhiber une série majorante  $\Phi$  de  $f$  pour laquelle la solution s'exprime aisément en terme de fonctions élémentaires (nous reprenons ce qui se trouve dans [21]).

Supposons que  $f(t, y) = \sum f_{n,m} t^n y^m$  converge pour  $|t| \leq r, |y| \leq r$  avec  $r > 0$ . On pose

$$M = \sup\{|f(t, y)| : |t| \leq r, |y| \leq r\}.$$

D'après les inégalités de Cauchy [21], on a pour tous entiers  $n, m$  positifs

$$|f_{n,m}| \leq M/r^{n+m}.$$

La série  $\Phi(t, y)$  définie par  $\Phi(t, y) = \sum M/r^{n+m} t^n y^m$  est donc une série majorante de  $f(t, y)$ . On trouve immédiatement

$$\Phi(t, y) = \frac{M}{(1 - t/r)(1 - y/r)}.$$

La solution  $\tilde{y}$  de  $y' = \Phi(t, y), y(0) = 0$  est donc une série majorante de  $\bar{y}$  d'après le lemme 1.3.3.

Or l'équation obtenue est à variables séparées. On obtient dès lors très facilement la solution de l'équation "majorante". En séparant les variables et en intégrant on trouve  $(y/r - 1)^2 = 2M \log(1 - t/r) + 1$  où  $\log$  désigne la détermination principale du logarithme. Le signe négatif de  $y/r - 1$  en  $t = 0$  impose que  $\tilde{y} = r - r\sqrt{1 + 2M \log(1 - t/r)}$  où l'on a pris la détermination principale de la racine carrée.

On a donc obtenu le résultat suivant.

**Proposition 1.3.4 (ex. [21])**

Soit  $f \in \mathbb{C}[[t, y]]$  convergente pour  $|t| \leq r, |y| \leq r$ . On pose

$$M = \sup\{|f(t, y)| : |t| \leq r, |y| \leq r\}.$$

Dans ce cas,  $\tilde{y} = r - r\sqrt{1 + 2M \log(1 - t/r)}$  est une série majorante de  $\bar{y}$  la solution de  $y' = f(t, y), y(0) = 0$ . De plus, le rayon de convergence de  $\tilde{y}$  est égal à  $r(1 - \exp(-1/2M))$ .

**Démonstration.** Il ne reste plus qu'à montrer que le rayon de convergence de  $\tilde{y}$  est  $r(1 - \exp(-1/2M))$ . Celui-ci est égal à la distance entre l'origine et la frontière du domaine d'holomorphicité de  $\tilde{y}$ . Or il n'est pas difficile de vérifier que la fonction  $\tilde{y}$  est holomorphe sur l'ouvert  $\mathbb{C} \setminus [r(1 - \exp(-1/2M)), +\infty[$ . Par conséquent, le rayon de convergence est bien  $r(1 - \exp(-1/2M))$

□

**Vers une majoration explicite** Nous sommes donc amenés à majorer les coefficients de la série entière  $\tilde{y} = \sum \tilde{y}_n t^n$  introduite précédemment.

En utilisant les inégalités de Cauchy, nous obtenons le résultat suivant.

**Proposition 1.3.5**

Soient  $r > 0$ ,  $M > 0$  donnés. On pose pour  $|t| < r(1 - \exp(-1/2M))$ ,

$$\tilde{y}(t) = r - r\sqrt{1 + 2M \log(1 - t/r)}.$$

Étant donné  $0 < s < r(1 - \exp(-1/2M))$ , on a

$$\sup_{|t| \leq s} |\tilde{y}(t)| \leq 3r.$$

En particulier pour tout entier  $n \geq 0$ ,

$$|\tilde{y}_n| \leq \frac{3}{r^{n-1}(1 - \exp(-1/2M))^n}.$$

**Démonstration.** On a  $|\tilde{y}(t)| \leq r + r|\sqrt{1 + 2M \log(1 - t/r)}|$ . Il suffit donc de majorer le module de

$$h(t) = \sqrt{1 + 2M \log(1 - t/r)}.$$

Posons  $f(t) = \sqrt{1 + t}$  et  $g(t) = 2M \log(1 - r/t)$ . On a  $h(t) = (f \circ g)(t)$  et pour  $t$  de module inférieur à  $s$ , on a

$$|g(t)| \leq 1.$$

En effet on a  $|\log(1 - t/r)| \leq -\log(1 - |t|/r)$  et la croissance de  $-\log(1 - |t|/r)$  sur l'intervalle  $[0, r(1 - \exp(-1/2M))]$  entraîne que  $|g(t)| \leq 1$ . Par conséquent,

$$\sup_{|t| \leq s} |h(t)| \leq \sup_{|t| \leq 1} |f(t)|.$$

Il reste à déterminer un majorant de  $f$  sur le disque unité. Comme pour  $|t| \leq 1$ ,

$$\sqrt{1 - t} = 1 - \sum_{n \geq 1} u_n t^n \text{ avec } u_n > 0 \text{ pour tout } n \geq 1,$$

on a donc

$$|f(t)| \leq 1 + \sum_{n \geq 1} u_n |t|^n.$$

D'où  $|f(t)| \leq 2 - \sqrt{1 - |t|}$  pour  $|t| \leq 1$ . On obtient dès lors

$$\sup_{|t| \leq 1} |f(t)| \leq 2 \text{ et } \sup_{|t| \leq s} |\tilde{y}(t)| \leq 3r.$$



La seconde inégalité résulte des inégalités de Cauchy. On a en effet, pour  $s$  vérifiant  $0 < s < r(1 - \exp(-1/2M))$ ,

$$|\tilde{y}_n| \leq \tilde{M}/s^n \text{ où } \tilde{M} = \sup_{|t| \leq s} |\tilde{y}(t)|.$$

D'après ce qui précède, on a donc pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $|\tilde{y}_n| \leq 3r/s^n$  et ceci pour tout  $s < r(1 - \exp(-1/2M))$ . D'où l'inégalité annoncée par passage à la limite.

□

### 1.3.2 Stratégie de remontée

Nous avons obtenu  $z := \bar{y} \pmod{(p, t^n)}$  en appliquant une méthode de Newton modulaire. On sait par ailleurs que pour connaître  $\bar{y} \pmod{t^n}$ , il suffit de connaître  $\bar{y} \pmod{(p^N, t^n)}$  avec  $p^N > 2B_n$ , où  $B_n$  est la borne sur les coefficients  $y_k$ ,  $1 \leq k \leq n-1$  obtenue précédemment.

Voyons comment maintenant remonter la solution  $\bar{y} \pmod{(p, t^n)}$  jusqu'à la solution  $\bar{y} \pmod{(p^N, t^n)}$ . Supposons avoir calculé  $z_k := \bar{y} \pmod{(p^k, t^n)}$ , avec  $k \geq 1$ .

En écrivant  $\bar{y} \pmod{t^n} = z_k + E$ , on observe que  $E$  vérifie

$$E' \equiv f_y(t, z_k)E + f(t, z_k) - z'_k \pmod{p^{2k}} \text{ et } E \pmod{p^k} = 0.$$

Il y alors deux stratégies possibles.

– Soit on calcule alors  $\bar{y} \pmod{(p^{k+1}, t^n)}$  : autrement dit, on résout l'équation

$$F' - f_y(t, z)F \equiv \frac{f(t, z_k) - z'_k}{p^k} \pmod{p}.$$

On obtient alors  $z_{k+1} = z_k + p^k F$ .

– Soit on calcule  $\bar{y} \pmod{(p^{2k}, t^n)}$  en récupérant  $E \pmod{p^{2k}}$  grâce à l'équation "différentielle" qu'elle satisfait.

L'avantage de la première stratégie est que seul le second membre change à chaque étape dans l'équation "différentielle" à résoudre. L'avantage de la seconde stratégie est qu'on fait moins d'étapes pour atteindre la borne  $2B_n$  : on en fait "seulement"  $\log_p(2B_n)$ .

#### Remarque 1.3.6

*On peut également calculer  $\bar{y} \pmod{(p^k, t^n)}$  par la méthode de Newton modulaire pour un  $k$  bien choisi, puis remonter les calculs, ou bien encore calculer directement  $\bar{y} \pmod{(p^N, t^n)}$  par la méthode de Newton modulaire. On pourrait envisager d'appliquer la méthode de Newton, et à chaque étape de celle-ci calculer d'abord les coefficients modulo  $p$ , puis remonter les calculs jusqu'à la borne correspondante.*



## Chapitre 2

# Computing Power Series Solutions of a Nonlinear PDE System

Ce chapitre est la reproduction d'un article coécrit avec E. Hubert et publié aux actes de la conférence ISSAC 2003 [43].

### 2.1 Introduction

A Newton method for computing the power series solution of a nonlinear system of ordinary differential equations of first order was introduced in [19, 31]. This paper offers a generalization to a significant class of nonlinear systems of partial differential equations.

After the work of Kowalevskaya, Riquier [62] proved the existence and uniqueness of analytic solutions to a wider class of systems of partial differential equations, the *passive orthonomic* systems. Riquier provided furthermore an algorithm that would bring any linear system, as well as some lucky nonlinear ones, to a system of that form. The proof of existence and uniqueness of Riquier consists in proving first the existence and uniqueness of a formal power series solution. At a second stage the series is proved to converge. Riquier's approach was completed for polynomially nonlinear differential equations by Ritt [63] by use of characteristic set method. See also [81].

This paper first presents a general framework for power series solution of polynomially nonlinear differential systems. Though borrowing heavily from [65, 16, 48] our presentation is more complete and compact. Proofs of existence and uniqueness of formal power series solutions indeed appear in [65] for *rif' form systems* and in [16, 48] for *regular differential systems*. Uniqueness is understood for a given *regular initial condition*. Rif' form systems and regular differential system are concepts which are in fact not far apart. They generalize and in some sense simplify the concept of passivity. Their significance owes to the fact that there are algorithms that will bring any polynomially nonlinear

differential system into an equivalent finite set of such systems [45, 61, 15, 16, 40, 18]. We shall review a proof of existence and uniqueness of power series solutions of a *regular differential system*.

The definitions of rif' form systems and regular differential systems depend on the choice of a *ranking* of the derivatives. The existence of formal power series solutions is independent of the ranking chosen. On the contrary, the convergence property of the found power series does. The *rankings of analyticity* defined in [49] are shown, in that same paper, to be the only rankings for which any analytic initial condition leads to a converging power series solution.

This paper addresses the computation of the formal power series solution of a regular differential system. The proofs of existence and uniqueness of the power series solutions of [65, 16] are constructive. The underlying algorithms are based on differential reductions, so basically on differentiation of the equations, and evaluation. We propose a new algorithm of a completely different nature for the computation of the power series solution of a regular differential system. This paper is a first report on a longer research project on the efficient computation of power series solutions. We concentrate here on showing the quadratic character of our algorithm : each step nearly doubles the order up to which the power series solution is known.

The basic step of the algorithm consists in using the linearized equations at an approximation of the solution to compute an approximation of the solution at a higher order. The extra terms of the new approximation are obtained through linear recurrence equations. If one knows an approximation of the solution at order  $\rho > r$ , where  $r$  is the order of the system, the linearized system will allow us to compute an approximation of the solution at order  $2\rho - r$ , or  $2\rho - r + 1$  if the system is of degree one in the  $r^{\text{th}}$  order derivatives. The algorithm is thus quadratic in the case of first order quasi-linear differential systems. The algorithm is described for orderly rankings. It can certainly be adapted to more general rankings, like rankings defined by weights. The algorithm can also be adapted in a straightforward way for rif' form systems.

We shall report on a first implementation of our algorithm in MAPLE. The implementation is faced with the difficulty of arithmetic operations with power series. The complexity study and a more subtle implementation is subject of future research.

The paper is divided in four sections. Some preliminaries in differential algebra are presented in Section 2.2. The aim of the section is to recall briefly the definition of regular differential systems and settle some notations. Evolving from [65, 16, 48] we give in Section 2.3 a general and compact treatment of the formal integrability of regular differential systems. Section 2.4 gives the heart of our method and details the new algorithm to compute the power series solution of a regular differential system. Finally in Section 2.5 we compare a first implementation of our algorithm to the implementations of the libraries *rif* [80] and *diffalg* [14] of MAPLE that implement the algorithms of [65] and [16].

## 2.2 Nonlinear differential systems from an algebraic viewpoint

In this section we review notations for constructive differential algebra. We shall aim at giving the definition of *regular differential systems*, as introduced in [15]. These systems have the excellent property of making the bridge between differential algebra and polynomial algebra. That is the key to effective algorithms that is expressed by the Rosenfeld lemma. A corollary of that lemma allows us to show, in next section, the existence and uniqueness of power series solutions for regular differential systems. Regular differential systems are all the more important that we have algorithms to decompose any differential systems into regular differential systems.

We refer the reader to [42] for an expanded tutorial presentation of this material that is fully consistent with the present notations and definitions. In particular we shall denote  $\llbracket \Sigma \rrbracket$  the radical differential ideal generated by  $\Sigma$ . The classical notation  $\{\Sigma\}$  leads to too many confusions in an algorithmic context. Classical references are the books by Ritt and Kolchin [45, 63], recent research literature include [20, 81, 54, 58, 15, 61, 16, 65, 40, 18] while reviews and tutorials are to be found in [46, 35].

We consider differential rings with commuting derivations  $\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ . We note  $\Theta$  the free commutative monoid generated by that set of derivations. An element  $\theta$  of  $\Theta$  can be written  $\theta = \delta_1^{\alpha_1} \dots \delta_m^{\alpha_m}$  for some  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$  and we shall write  $\theta = \delta^\alpha$  for short. Its *order* is then  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ . For  $r \in \mathbb{N}$  we note  $\Theta_r$  the set of derivation operators of order  $r$  or lower.  $\Theta^+$  denotes the set of derivation operators of positive order.

Given a differential ring  $\mathcal{R}$  and a set of *differential indeterminates*  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ ,  $\mathcal{R} \llbracket Y \rrbracket$  denotes the *ring of differential polynomials* with coefficient in  $\mathcal{R}$ . It is the polynomial ring in the infinitely many variables  $\Theta Y = \{\theta y, y \in Y, \theta \in \Theta\}$ , called the *derivatives*. Let  $\Sigma$  be a subset of  $\mathcal{R} \llbracket Y \rrbracket$ . We denote respectively  $(\Sigma)$ ,  $[\Sigma]$  and  $\llbracket \Sigma \rrbracket$  the ideal, the differential ideal and the radical differential ideal generated by  $\Sigma$ .

$\mathcal{R} \llbracket Y \rrbracket$  is understood to be endowed with a *differential ranking*, or simply *ranking* as no confusion shall arise. For  $u \in \Theta Y$ , we note  $\Theta Y_{<u}$  the set of derivatives that rank lower than  $u$ . A ranking is *orderly* if it satisfies  $\phi y < \psi x$ , for  $x, y \in Y$  and  $\phi, \psi \in \Theta$ , as soon as  $|\phi| < |\psi|$ . In that case, the sets  $\Theta Y_{<u}$  are finite for any  $u \in \Theta Y$ .

Let  $p$  be a differential polynomial of  $\mathcal{R} \llbracket Y \rrbracket$  that is not in  $\mathcal{R}$ . The *leader* and *separant* of  $p$  shall be denoted by  $\text{lead}(p)$  and  $\text{sep}(p)$ . A subset  $A$  of  $\mathcal{R} \llbracket Y \rrbracket$  is a *differential triangular set*, if no element of  $A$  belongs to  $\mathcal{R}$  and any element of  $A$  is partially reduced w.r.t. the other ones and any two distinct elements of  $A$  have distinct leaders. We denote  $\mathfrak{L}(A) = \text{lead}(A)$  and  $S_A = \text{sep}(A)$  the sets of leaders and separants of the elements of  $A$ .  $\Theta A_{<u}$ , for  $u \in \Theta Y$  denotes the set consisting of all elements of  $A$  together with all their derivatives the leaders of which are of lower rank than  $u$ . In other words  $\Theta A_{<u} = \Theta A \cap \mathcal{R}[\Theta Y_{<u}]$ .

Given an element  $q \in \mathcal{R} \llbracket Y \rrbracket$  there exist processes of partial reduction that compute an element  $r$  partially reduced w.r.t.  $A$  such that  $sq \equiv r \pmod{[A]}$  for some  $s \in S_A^\infty$ .

For  $a, b \in \mathcal{R} \llbracket Y \rrbracket$  s.t.  $\text{lead}(a)$  and  $\text{lead}(b)$  have a common derivative, while they are not derivative of one another, we define  $\Delta(a, b) = \text{sep}(b)\psi(a) - \text{sep}(a)\phi(b)$ , where  $\phi, \psi \in \Theta$  are s.t.  $\psi(\text{lead}(a)) = \phi(\text{lead}(b))$  is the lowest common derivative of  $\text{lead}(a)$  and  $\text{lead}(b)$ .

**Definition 2.2.1**

A pair  $(A, H)$  of finite subsets of  $\mathcal{R} \llbracket Y \rrbracket$  is a regular differential system if

- $A$  is a  $d$ -triangular set
- $H$  is a set of nonzero differential polynomials partially reduced w.r.t.  $A$
- $S_A \subset H^\infty$
- for all  $a, b \in A$ ,  $\Delta(a, b) \in (\Theta A_{<v}) : H^\infty$  where  $v$  is the lowest common derivative of  $\text{lead}(a)$  and  $\text{lead}(b)$ , if such a  $v$  exists.

Regular differential systems occur as outputs of triangulation decomposition algorithms. The key of the algorithms relies on the following theorem that is an adaptation of a result of Rosenfeld [64, 16].

**Theorem 2.2.2**

(Rosenfeld's lemma) Let  $(A, H)$  be a regular differential system in  $\mathcal{R} \llbracket Y \rrbracket$ . A differential polynomial that is partially reduced w.r.t.  $A$  belongs to  $[A] : H^\infty$  if and only if it belongs to  $(A) : H^\infty$ .

Let  $\mathcal{R}$  be an integral ring for which we can perform arithmetic operations and derivations as well as testing if an element is zero. Then, there are algorithms [15, 16, 40, 18, 72, 42] that computes for any pair  $(\Sigma, H)$  of finite sets of differential polynomials in  $\mathcal{R} \llbracket Y \rrbracket$  a finite set of regular differential systems  $(A_1, H_1), \dots, (A_r, H_r)$  such that the equality

$$[\Sigma] : H^\infty = [A_1] : H_1^\infty \cap \dots \cap [A_r] : H_r^\infty$$

holds in  $\mathfrak{Q}(R) \llbracket Y \rrbracket$ , where  $\mathfrak{Q}(R)$  is the field of fractions of  $\mathcal{R}$ .

A power series is a solution of the original system  $\Sigma = 0, H \neq 0$  if and only if it is a solution of an output system  $A_i = 0, H_i \neq 0$ . Given this equivalence it is no loss of generality to inspect power series solutions of regular differential systems.

## 2.3 Formal integrability

We define and characterize here power series solution of a differential system. We then proceed to define *regular initial conditions* for a regular differential system in the way of [48]. We will then give the proof of existence and uniqueness of a power series solution to a regular differential system for a given regular initial condition. That proof goes in the sense of [16]. Another proof of

existence and uniqueness of power series solution for a *rif' form system*<sup>1</sup> appears in [65]. Though borrowing from [16, 65, 48], as well as taking inspiration from [71], we feel our presentation is more complete and compact than those.

### 2.3.1 Power series

In this section we shall establish the notations concerning power series that will be used in the rest of the paper.

We first note  $\mathcal{S} = \mathcal{K}[[t_1, \dots, t_m]]$  the power series ring in  $m$  variables with coefficients in a field  $\mathcal{K}$  that is an extension of  $\mathbb{Q}$ , the field of rational numbers. We make it a differential ring for the derivations  $\delta_1, \dots, \delta_m$  in the usual way :  $\delta_i t_j$  is equal to 1 or 0 according to whether  $i = j$  or not.

We shall note  $\preceq$  the partial product order on  $\mathbb{N}^m$ . The quadrant  $\theta + \mathbb{N}^m$ ,  $\theta \in \mathbb{N}^m$ , is the set of elements  $\beta \in \mathbb{N}^m$  s.t.  $\theta \preceq \beta$ . For  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$  we shall note  $t^\alpha$  the term  $t_1^{\alpha_1} \dots t_m^{\alpha_m}$  and likewise  $\delta^\alpha$  the derivation operator  $\delta_1^{\alpha_1} \dots \delta_m^{\alpha_m}$ . For  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^m$  we note  $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_m!$  and if  $\alpha \preceq \beta$   $\binom{\beta}{\alpha} = \frac{\beta!}{\alpha! (\beta - \alpha)!}$ .

For  $s \in \mathcal{S}$  we shall note  $\Phi_\alpha(s)$  the evaluation at  $t = 0$  of  $\delta^\alpha s$  so that one can write  $s = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} \Phi_\beta(s) \frac{t^\beta}{\beta!}$ .  $\Phi_0 : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{K}$  is a ring morphism. Note that for  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^m$ ,  $\Phi_\beta(\delta^\alpha s) = \Phi_{\alpha + \beta}(s)$  so that  $\Phi_\beta = \Phi_0 \circ \delta^\beta$ . For  $s, s' \in \mathcal{S}$

$$\Phi_\beta(s s') = \sum_{\alpha \preceq \beta} \binom{\beta}{\alpha} \Phi_{\beta - \alpha}(s) \Phi_\alpha(s').$$

### 2.3.2 Power series solution

In this section we inspect the meaning of power series solutions for a differential system. Usually a zero of a differential system  $(\Sigma, H)$  in some differential polynomial ring  $\mathcal{F}[[y_1, \dots, y_n]]$ , where  $\mathcal{F}$  is a differential field, is defined by a pair  $(\mathcal{F}', \Psi)$  where  $\mathcal{F}'$  is a differential field extension of  $\mathcal{F}$  and  $\Psi : \mathcal{F}[[y_1, \dots, y_n]] \rightarrow \mathcal{F}'$  is a differential ring morphism s.t.  $\Psi(p) = 0$  for all  $p \in \Sigma$  and  $\Psi(h) \neq 0$  for all  $h \in H$ . We adapt that definition for power series solutions.

The differential systems we shall deal with may have their coefficients in a ring of power series  $\mathcal{K}_0[[t_1, \dots, t_m]]$  but more usually have them in a polynomial ring  $\mathcal{K}_0[t_1, \dots, t_m]$ . In both cases we can consider them as differential systems with coefficients in  $\mathcal{S} = \mathcal{K}[[t_1, \dots, t_m]]$  where  $\mathcal{K}$  is a field extension of  $\mathcal{K}_0$ . In practice we take  $\mathcal{K}$  to contain the coefficients of the *initial conditions*. We can indeed embed  $\mathcal{K}_0[[t_1, \dots, t_m]]$  and  $\mathcal{K}_0[t_1, \dots, t_m]$  in  $\mathcal{S}$ . In the case of  $\mathcal{K}_0[[t_1, \dots, t_m]]$  the  $t_i$  are left invariant through the embedding while in the case of  $\mathcal{K}_0[t_1, \dots, t_m]$ , the image of  $(t_1, \dots, t_m)$  by the embedding is  $(a_1 + t_1, \dots, a_m + t_m)$  for some  $(a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{K}^m$  that is the point at which we look for the power series solution. That construction allows us to only consider

<sup>1</sup>It is not too hard to bring a regular differential system to a *rif'* form.

formal power series solutions around the origin with no further extension of the base field.

**Definition 2.3.1**

A power series solution of the differential system  $(\Sigma, H)$  of  $\mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]]$  is defined by a morphism of differential  $\mathcal{S}$ -algebra  $\Psi : \mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]] \rightarrow \mathcal{S}$  such that  $\Psi(p) = 0$  for all  $p \in \Sigma$  while  $\Psi(h) \neq 0$  for all  $h \in H$ .

Consider a differential ring morphism  $\Psi : \mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]] \rightarrow \mathcal{S}$ . It induces the ring morphism  $\bar{\Psi} = \Phi_0 \circ \Psi$  from  $\mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]]$  to  $\mathcal{K}$  s.t.  $\bar{\Psi}(\delta^\theta y_i) = \Phi_\theta(\tilde{y}_i)$ , where  $\tilde{y}_i = \Psi(y_i)$ . If  $I$  is a differential ideal of  $\mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]]$  s.t.  $I \subset \ker \Psi$  then  $I \subset \ker \bar{\Psi}$ .

Conversely, consider a ring morphism  $\bar{\Psi} : \mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]] \rightarrow \mathcal{K}$  and define the application  $\Psi : \mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]] \rightarrow \mathcal{S}$  by

$$\Psi(p) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} \bar{\Psi}(\delta^\beta p) \frac{t^\beta}{\beta!} \text{ for all } p \in \mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]].$$

One easily checks that  $\Psi$  is a differential morphism leaving  $\mathcal{S}$  invariant. It is thus the differential morphism over  $\mathcal{S}$  defined by  $\Psi(y_i) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} \bar{\Psi}(\delta^\beta y_i) \frac{t^\beta}{\beta!}$ . Furthermore  $\Psi(p) = 0$  iff  $[p] \subset \ker \bar{\Psi}$ . If  $I$  is a differential ideal of  $\mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]]$  s.t.  $I \subset \ker \bar{\Psi}$  then  $I \subset \ker \Psi$ .

We summarize the previous discussion in a property. That shall allow us to define initial conditions and prove the existence and uniqueness of power series solutions to regular differential systems.

**Proposition 2.3.2**

In  $\mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]]$  consider the differential system  $(\Sigma, H)$ . Let  $\bar{\Psi} : \mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]] \rightarrow \mathcal{K}$  be a ring morphism s.t.  $[\Sigma] \subset \ker \bar{\Psi}$  but  $[h] \not\subset \ker \bar{\Psi}$ , for all  $h \in H$ . Then the differential ring morphism  $\Psi : \mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]] \rightarrow \mathcal{S}$  defined by

$$\Psi(y_i) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} \bar{\Psi}(\delta^\beta y_i) \frac{t^\beta}{\beta!}$$

is a power series solution of  $(\Sigma, H)$ .

By extension, we shall say in this section that  $\bar{\Psi}$  is a power series solution of  $(\Sigma, H)$ .

**2.3.3 Initial conditions and associated power series solution**

In this section we reproduce the definition of initial condition of regular differential system by [48] and obtain a formal integrability statement as a corollary of Rosenfeld lemma. Basically an initial condition for a d-triangular set  $A$  is defined by a set of values given to the derivatives that are not proper derivatives of the leaders of  $A$ .



**Definition 2.3.3**

Let  $(A, H)$  be a regular differential system of  $\mathcal{S} \llbracket y_1, \dots, y_n \rrbracket$ . A regular initial condition for  $(A, H)$  is a  $\mathcal{K}$ -morphism  $\Psi_0 : \mathcal{S}[\Theta Y \setminus \Theta^+ \mathcal{L}(A)] \rightarrow \mathcal{K}$ , such that  $(A) \subset \ker \Psi_0$  while  $\Psi_0(h) \neq 0$ , for any  $h \in H$ .

An initial condition is thus defined by attributing values to the derivatives that are not proper derivative of the leaders. Checking that an initial condition is regular consists in checking that the values make the elements of  $A$  vanish while making no element of  $H$  vanish. This is a test on a finite number of values, the ones corresponding to the derivatives present in the elements of  $A$  and  $H$ . Note that any element of  $\Psi_0(\mathcal{L}(A))$  is thus (separably) algebraic over  $\Psi_0(\Theta Y \setminus \Theta \mathcal{L}(A))$ .

To an initial condition  $\Psi_0$  we can thus associate the power series  $\omega \in \mathcal{S}^n$  such that

$$\omega_i = \sum_{\delta^\beta y_i \notin \Theta^+ \mathcal{L}(A)} \Psi_0(\delta^\beta y_i) \frac{t^\beta}{\beta!}.$$

**Proposition 2.3.4**

Let  $(A, H)$  be a regular differential system of  $\mathcal{S} \llbracket y_1, \dots, y_n \rrbracket$  and  $\Psi_0 : \mathcal{S}[\Theta Y \setminus \Theta^+ \mathcal{L}(A)] \rightarrow \mathcal{K}$  a regular initial condition for it. There exists a unique power series solution  $\Psi : \mathcal{S} \llbracket y_1, \dots, y_n \rrbracket \rightarrow \mathcal{K}$  of  $(A, H)$  extending  $\Psi_0$ . That power series solution is s.t.  $\Psi(h) \neq 0$  for any  $h \in H$ .

**Proof:** We define, for any  $p \in \mathcal{S} \llbracket y_1, \dots, y_n \rrbracket$ ,  $\Psi(p)$  to be  $\frac{\Psi_0(r)}{\Psi_0(h)}$  for any  $r \in \mathcal{S}[\Theta Y \setminus \Theta^+ \mathcal{L}(A)]$  and  $h \in H^\infty$  such that  $hp \equiv r \pmod{[A]}$ . Such a pair  $(h, r)$  exists and can be found by partial reduction. Furthermore, the definition does not depend on the pair  $(h, r)$ . Indeed if  $(h', r')$  satisfies the same congruence then  $h'r - hr' \in [A] \cap \mathcal{S}[\Theta Y \setminus \Theta^+ \mathcal{L}(A)]$ . By Theorem 2.2.2,  $h'r - hr' \in (A) : H^\infty$  where  $(A) : H^\infty$  is viewed as an ideal in  $\mathcal{S}[\Theta Y \setminus \Theta^+ \mathcal{L}(A)]$ . There thus exists  $k \in H^\infty$  s.t.  $k(h'r - hr') \in (A)$  so that  $\Psi_0(h'r - hr') = 0$ . Indeed  $\Psi_0(k) \neq 0$  while  $\Psi_0(k(h'r - hr')) = 0$  by definition of regular initial condition. Consequently  $\frac{\Psi_0(r')}{\Psi_0(h')} = \frac{\Psi_0(r)}{\Psi_0(h)}$ .

We show that the defined application  $\Psi$  is a ring morphism. For  $f, g \in \mathcal{S} \llbracket y_1, \dots, y_n \rrbracket$ , let  $h, h' \in H^\infty$ ,  $r, r' \in \mathcal{S}[\Theta Y \setminus \Theta^+ \mathcal{L}(A)]$  be such that  $hf \equiv r \pmod{[A]}$  and  $h'g \equiv r' \pmod{[A]}$ . As  $hh'(f + g) \equiv h'r + hr' \pmod{[A]}$  and  $hh'fg \equiv rr' \pmod{[A]}$  we have  $\Psi(f + g) = \frac{\Psi_0(h'r + hr')}{\Psi_0(hh')} = \frac{\Psi_0(r)}{\Psi_0(h)} + \frac{\Psi_0(r')}{\Psi_0(h')} = \Psi(f) + \Psi(g)$  and  $\Psi(fg) = \frac{\Psi_0(rr')}{\Psi_0(hh')} = \frac{\Psi_0(r)}{\Psi_0(h)} \frac{\Psi_0(r')}{\Psi_0(h')} = \Psi(f) \Psi(g)$  since  $\Psi_0$  is a ring morphism.

The morphism  $\Psi$  clearly extends  $\Psi_0$ . In particular for any element  $h \in H$  we have  $\Psi(h) = \Psi_0(h) \neq 0$ . Now, for  $p \in [A] \subset [A] : H^\infty$  we have  $\Psi(p) = 0$ . Indeed, if  $(h, r)$  is the pair used to define  $\Psi(p)$  then by Theorem 2.2.2  $r \in (A) : H^\infty$ . There thus exists  $k \in H^\infty$  s.t.  $kr \in (A)$  so that  $hkp \equiv 0 \pmod{[A]}$ . Existence is thus secured.

Assume now  $\Psi : \mathcal{S} \llbracket y_1, \dots, y_n \rrbracket \rightarrow \mathcal{K}$  is any power series solution of  $(A, H)$  extending  $\Psi_0$ . For any  $p \in \mathcal{S} \llbracket y_1, \dots, y_n \rrbracket$  there exists  $h \in H^\infty$

and  $r \in \mathcal{S}[\Theta Y \setminus \Theta^+ \mathfrak{L}(A)]$  such that  $hp \equiv r \pmod{[A]}$ . As  $[A] \subset \ker \Psi$ ,  $\Psi(h)\Psi(p) = \Psi(r)$  so that  $\Psi(p) = \frac{\Psi_0(r)}{\Psi_0(h)}$  since  $\Psi_0(h) \neq 0$ . Uniqueness is thus secured too.

□

Note that the condition  $\Psi(h) \neq 0$  satisfied by the power series solution we exhibited is more constraining than the general requirement  $[h] \not\subset \ker \Psi$ . With this process we do not obtain all the power series solution of  $(A, H)$ . That is an undecidable problem already in the case of ordinary differential equations [28, 59].

The above proof is constructive and discloses an algorithm, based on differentiating the equations, to compute the power series solution up to a certain order. Variants of it are implemented within the MAPLE libraries *diffalg* [14] and *rif* [80]. In next section we present a very different way of proceeding for the computation.

## 2.4 Computing power series solutions

Now that we secured the existence and uniqueness of a power series of a regular differential system we proceed to present a new algorithm to compute the power series solution of a regular differential system for a given regular initial condition. The coefficients are computed inductively through recurrence relationships associated to the linearized system.

We show first that we can associate linear recurrence equations to linear differential systems in a way that the coefficients of the power series solutions of the differential systems satisfy the recurrence equations. As a result, the coefficients of the power series solutions of a linear differential system can be computed inductively.

For nonlinear differential systems the basic step of the algorithm is as follows. Assume we know the power series solution up to a certain order  $\rho$ . Linearize the differential system around that approximated solution. Use the associated recurrence equations to compute up to as big an order as possible the power series solution of the non-linear system. The algorithm thus belongs to a family of Newton methods.

In the case of system of ordinary differential equations (of first order) there are explicit formula for power series solutions of linear systems and those can be used to compute new coefficients of the power series solution of the non linear system [19, 31]. No such explicit formula exists for systems of partial differential equations. More awkwardly the existence of a power series solution of the linearized systems we consider is not secured.

Let  $\mathcal{R}$  be an  $\mathcal{S}$ -algebra. A morphism of differential  $\mathcal{S}$ -algebra  $\Psi : \mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]] \rightarrow \mathcal{R}$  is completely determined by the image  $(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$  of  $(y_1, \dots, y_n)$ . For  $p \in \mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]]$  we shall write  $p(\tilde{y})$  for  $\Psi(p)$ . If

$\Psi : \mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]] \rightarrow \mathcal{S}$  is in fact a power series solution of a differential system  $(\Sigma, H)$  of  $\mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]]$  we shall say in this section and the next that  $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n) \in \mathcal{S}^n$  is a power series solution of  $(\Sigma, H)$  or simply that  $\tilde{y} \in \mathcal{S}^n$  is a zero of  $(\Sigma, H)$ . Another case of interest will be the translation morphism  $\tau_{\bar{y}} : \mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]] \rightarrow \mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]]$ , where  $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m) \in \mathcal{S}^n$ , that is defined by  $\tau_{\bar{y}}(y_i) = \bar{y}_i + y_i$ . For  $p \in \mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]]$  we shall write  $p(\bar{y} + y)$  instead of  $\tau_{\bar{y}}(p)$ .

### 2.4.1 Linear differential equations

We show that the coefficients of the power series solution of a linear differential equation can be computed inductively through a linear recurrence relationship. The order underlying the induction is dictated by the ranking  $\leq$  on the differential polynomial ring.

#### Proposition 2.4.1

Assume  $l$  is a linear differential polynomial of  $\mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]]$  with leader  $\delta^\theta y_\kappa$ , for some  $\theta \in \mathbb{N}^m$  and  $\kappa \in \{1, \dots, n\}$ . Write it as

$$l = \sum_{\delta^\beta y_i \leq \delta^\theta y_\kappa} a_{i\beta} \delta^\beta y_i - b \text{ where } b, a_{i\beta} \in \mathcal{S}.$$

Assume  $\tilde{y} \in \mathcal{S}^n$  is a zero of  $l$  s.t.  $\Phi_0(a_{\kappa\theta}) \neq 0$ . For any  $\alpha \in \mathbb{N}^m$ ,  $\Phi_{\theta+\alpha}(\tilde{y}_\kappa)$  depends linearly on a finite subset of  $\{\Phi_\gamma(\tilde{y}_i) \mid \delta^\gamma y_i < \delta^{\theta+\alpha} y_\kappa\}$ , the lower ranking coefficients. The explicit relationship is

$$\Phi_\alpha(b) = \sum_{\substack{\delta^\beta y_i \leq \delta^\theta y_\kappa \\ \gamma \preceq \alpha}} \binom{\alpha}{\gamma} \Phi_{\alpha-\gamma}(a_{i\beta}) \Phi_{\gamma+\beta}(\tilde{y}_i)$$

where the coefficient of  $\Phi_{\theta+\alpha}(\tilde{y}_\kappa)$  is  $\Phi_0(a_{\kappa\theta})$ .

**Proof:** For any  $\bar{y} \in \mathcal{S}^n$  we have

$$\Phi_\alpha(l(\bar{y})) = \sum_{\delta^\beta y_i < \delta^\theta y_\kappa} \sum_{\gamma \preceq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \Phi_{\alpha-\gamma}(a_{i\beta}) \Phi_\gamma(\delta^\beta \bar{y}_i) - \Phi_\alpha(b).$$

As  $\Phi_\gamma(\delta^\beta \bar{y}_i) = \Phi_{\beta+\gamma}(\bar{y}_i)$  and  $\Phi_\alpha(l(\tilde{y})) = 0$  we obtain the desired relationship.

□

Conversely, any element  $\tilde{y} \in \mathcal{S}^n$  satisfying  $\Phi_0(a_{\kappa\beta}(\tilde{y})) \neq 0$  and the previous relationship for any  $\alpha \in \mathbb{N}^m$  is a series solution of  $l$ . As a consequence, for a regular initial condition there is a unique power series solution  $\tilde{y}$  to  $l$  and its *missing* coefficients can be computed inductively through the previous recurrence relationships. The generalization to regular differential system that are linear is not difficult (but not used in this paper).

## 2.4.2 Linearisation

We chose now  $\leq$  to be an orderly ranking on  $\mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]]$ . We shall show that we can use the linearisation of a differential polynomial to compute extra coefficient of a power series solution of that differential polynomial.

Let  $p$  be a differential polynomial of  $\mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]]$  with leader  $\delta^\theta y_\kappa$ ,  $\theta \in \mathbb{N}^m$ ,  $\kappa \in \{1, \dots, n\}$ . That implies  $p \in (\Theta_r Y)$  for any  $r$  greater or equal to  $|\theta|$ .

Let  $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m)$  be an element of  $\mathcal{S}^n$ . According to Taylor formula at order one, we can write  $p(\bar{y} + y) \in \mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]]$  as

$$p(\bar{y} + y) \equiv p(\bar{y}) + \sum_{\delta^\beta y_i \leq \delta^\theta y_\kappa} \frac{\partial p}{\partial \delta^\beta y_i}(\bar{y}) \delta^\beta y_i \pmod{(\Theta_{|\theta|} Y)^2}.$$

Let  $\mathcal{L}_{p|\bar{y}}$  denote that linear differential polynomial in the right handside. We define a *linearisation of  $p$  at  $\bar{y}$  and order  $\rho$*  to be a linear differential polynomial

$$\mathcal{L}_{p|\bar{y}}^{(\rho)} = \sum_{\delta^\beta y_i \leq \delta^\theta y_\kappa} a_{i\beta} \delta^\beta y_i + b \in \mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]]$$

$$\text{where } a_{i\beta} \equiv \frac{\partial p}{\partial \delta^\beta y_i}(\bar{y}) \text{ and } b \equiv p(\bar{y}) \pmod{(t_1, \dots, t_m)^\rho}.$$

For short we shall write  $(t)^\rho$  instead of  $(t_1, \dots, t_m)^\rho$ . If  $\bar{z} \in \mathcal{S}^n$  is such that  $\bar{z} \equiv 0 \pmod{(t)^\rho}$ , then  $\delta^\alpha \bar{z} \equiv 0 \pmod{(t)^{\rho-|\alpha|}}$ . For any  $q \in (\Theta_r Y)^2$ , with  $r \leq \rho$ ,  $q(\bar{z}) \in (t)^{2\rho-2r}$ . Thus, if  $\bar{z} \equiv 0 \pmod{(t)^\rho}$  and  $\rho \geq r \geq |\theta|$  then

$$p(\bar{y} + \bar{z}) \equiv \mathcal{L}_{p|\bar{y}}^{(2\rho-2r)}(\bar{z}) \pmod{(t)^{2\rho-2r}}.$$

### Proposition 2.4.2

Consider  $p$  in  $\mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]]$  with leader  $\delta^\theta y_\kappa$  and separant  $s$ . Let  $\tilde{y} \in \mathcal{S}^n$  be a zero of  $p$  s.t.  $\Phi_0(s(\tilde{y})) \neq 0$ . Let  $\bar{y} \in \mathcal{S}^n$  be s.t.  $\bar{y} \equiv \tilde{y} \pmod{(t)^\rho}$  where  $\rho \geq |\theta|$ . If  $|\theta| \leq r \leq \rho$  then for any  $\alpha \in \theta + \mathbb{N}^m$  s.t.  $|\alpha| < 2\rho - r$ ,  $\Phi_\alpha(\tilde{y})$  depends linearly on  $\{\Phi_\gamma(\tilde{y}_i) \mid \delta^\gamma y_i < \delta^\alpha y_\kappa\}$ , the lower ranking coefficients.

If  $\mathcal{L}_{p|\bar{y}}^{(2\rho-2r)} = \sum_{\delta^\beta y_i < \delta^\theta y_\kappa} a_{i\beta} \delta^\beta y_i - b$  is a linearisation of  $p$  at  $\bar{y}$  and order  $2\rho - 2r$  then the explicit relationship is

$$\Phi_{\alpha-\theta}(b) = \sum_{\substack{\delta^\beta y_i < \delta^\theta y_\kappa \\ \gamma \leq \alpha-\theta}} \binom{\alpha-\theta}{\gamma} \Phi_{\alpha-\theta-\gamma}(a_{i\beta}) \Phi_{\gamma+\beta}(\tilde{y}_i)$$

where the coefficient of  $\Phi_\alpha(\tilde{y}_\kappa)$  in the right hand side is

$$\Phi_0(a_{\kappa\theta}) = \Phi_0(s(\bar{y})) \neq 0.$$

**Proof:** As  $\tilde{y} - \bar{y} \equiv 0 \pmod{(t)^\rho}$  and  $|\alpha - \theta| < 2\rho - 2r$  we have

$$\Phi_{\alpha-\theta} \left( \mathcal{L}_{p|\bar{y}}^{(2\rho-2r)}(\tilde{y} - \bar{y}) \right) = \Phi_{\alpha-\theta}(p(\tilde{y})) = 0.$$

Note that  $a_{\kappa\theta} = s(\bar{y})$  and therefore  $\Phi_0(a_{\kappa\theta}) = \Phi_0(s(\bar{y}))$ . Since  $\rho \geq |\theta|$  and  $\bar{y} \equiv \tilde{y} \pmod{(t)^\rho}$  we have  $\Phi_0(s(\bar{y})) = \Phi_0(s(\tilde{y})) \neq 0$ .

Making explicit the coefficient  $\Phi_{\alpha-\theta} \left( \mathcal{L}_{p|\bar{y}}^{(2\rho-2r)}(\tilde{y} - \bar{y}) \right)$  as we did in the proof of Proposition 2.4.1 we obtain the desired relationship.

□

We could enunciate as an immediate corollary that if  $\tilde{z}$  is a series solution of the linearisation  $\mathcal{L}_{p|\bar{y}}^{(2\rho-2r)}$  such that

$$\Phi_\beta(\tilde{z}_i) = \begin{cases} 0 & \text{if } |\beta| < \rho \\ \Phi_\beta(\tilde{y}_i - \bar{y}_i) & \text{if } |\beta| \geq \rho \text{ and } \delta^\beta y_i \notin \Theta\{\delta^\theta y_\kappa\} \end{cases}$$

then  $\bar{y} + \tilde{z} \equiv \tilde{y} \pmod{(t)^{2\rho-r}}$ . Indeed, the inductive relationships of Proposition 2.4.1 proves the existence and uniqueness of such a solution  $\tilde{z}$ . This wording is adequate for a single equation or for a system of ordinary differential equations. The benefit of such a wording is that it leaves the choice on how to compute the coefficients of the series solution of the linear equation. In [19, 31] the power series solution is computed from an explicit formula and its Taylor series expansion is itself evaluated by a Newton operator. The MAPLE package associated to [70] implements that approach. On the other hand the command *dsolve/series* of MAPLE implements the computation through the recurrences associated to the linearized differential system. For systems of partial differential equations we have to be more specific on how to compute the additional coefficients. A reason for that is that the linearized differential systems to be considered need not to admit power series solution for themselves. An example of such a situation is given below

Let  $A$  be a d-triangular set of  $\mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]]$  s.t.  $r$  is the maximal order of the leaders of the elements of  $A$ . For  $\bar{y} \in \mathcal{S}^n$  we define the *linearisation*  $\mathcal{L}_{A|\bar{y}}^{(\rho)}$  of  $A$  at  $\bar{y}$  and order  $\rho$  to be the set of the linearisations of the elements of  $A$  at  $\bar{y}$  and order  $\rho$ . If  $s(\bar{y}) \not\equiv 0 \pmod{(t)^\rho}$  for any  $s \in S_A$  then  $\mathcal{L}_{A|\bar{y}}^{(\rho)}$  is a linear d-triangular set with the same set of leaders as  $A$ .

### Example 2.4.3

Let  $\mathcal{S} = \mathbb{Q}[[s, t]]$  and consider the regular differential system  $(A, \emptyset)$  of  $\mathcal{S}[[y, z]]$  where  $A = \{y_s - zy^2, y_t - y, z_t + z, z_s\}$ . By Proposition 2.3.4, the regular initial condition defined by  $\bar{y} = 1 + s + t$  and  $\bar{z} = 1 - t$  extends in a unique way to a power series solution  $(\tilde{y}, \tilde{z}) \in \mathcal{S}^2$ . We have  $(\bar{y}, \bar{z}) \equiv (\tilde{y}, \tilde{z}) \pmod{(s, t)^2}$ . To compute  $(\tilde{y}, \tilde{z})$  at order 3 we shall use the linearisation  $\mathcal{L}_{A|(\bar{y}, \bar{z})}^{(2)}$  of  $A$  at order 2 which is  $\{y_s - 2(1+s)y - (1+2s+2t)z - 2s - t, y_t - y - s - t, z_t + z - t, z_s\}$ .  $\mathcal{L}_{A|(\bar{y}, \bar{z})}^{(2)}$  is a differential triangular set but it is not coherent. In fact  $1 \in [\mathcal{L}_{A|(\bar{y}, \bar{z})}^{(2)}]$  so that it admits no zero of any sorts. Informally speaking though, the incoherence in the linearized system appears only at order bigger than 2.

We can improve Proposition 2.4.2 if the differential polynomial has some linearity in it. If the differential polynomial  $p$  is of degree one in all its  $|\theta|^{th}$  order derivatives then

$$p(\bar{y} + y) \equiv \mathcal{L}_{p|\bar{y}}(y) \pmod{(\Theta_{|\theta|-1}Y)^2 + (\Theta_{|\theta|-1}Y)(\Theta_{|\theta|}Y)}.$$

so that for  $\bar{z} \in \mathcal{S}^n$  s.t.  $z \equiv 0 \pmod{(t)^\rho}$  with  $\rho \geq |\theta|$

$$p(\bar{y} + \bar{z}) \equiv \mathcal{L}_{p|\bar{y}}^{(2\rho-2r+1)}(\bar{z}) \pmod{(t)^{2\rho-2r+1}}.$$

If furthermore the differential polynomial  $p$  is linear in  $|\theta|^{th}$  order derivatives then

$$p(\bar{y} + y) \equiv \mathcal{L}_{p|\bar{y}}(y) \pmod{(\Theta_{|\theta|-1}Y)^2}.$$

so that  $p(\bar{y} + \bar{z}) \equiv \mathcal{L}_{p|\bar{y}}^{(2\rho-2r+2)}(\bar{z}) \pmod{(t)^{2\rho-2r+2}}$ . We thus obtain the following improved result in those cases.

#### Proposition 2.4.4

Additionally to the hypotheses of Proposition 2.4.2 assume that  $p$  is of degree one in its derivatives of order  $|\theta|$ . Then for any  $\alpha \in \theta + \mathbb{N}^m$  s.t.  $|\alpha| < 2\rho - |\theta| + 1$ ,  $\Phi_\alpha(\tilde{y})$  depends linearly on  $\{\Phi_\gamma(\tilde{y}_i) \mid \delta^\gamma y_i < \delta^\alpha y_\kappa\}$ , the lower ranking coefficients.

If  $\mathcal{L}_{p|\bar{y}}^{(2\rho-2|\theta|+1)} = \sum_{\delta^\beta y_i < \delta^\theta y_\kappa} a_{i\beta} - b$  is the linearisation of  $p$  at  $\bar{y}$  and order  $2\rho - 2|\theta| + 1$  then the explicit relationship is

$$\Phi_{\alpha-\theta}(b) = \sum_{\substack{\delta^\beta y_i \leq \delta^\theta y_\kappa \\ \gamma \leq \alpha - \theta}} \binom{\alpha-\theta}{\gamma} \Phi_{\alpha-\theta-\gamma}(a_{i\beta}) \Phi_{\gamma+\beta}(\tilde{y}_i)$$

where the coefficient of  $\Phi_\alpha(\tilde{y}_\kappa)$  in the right hand side is

$$\Phi_0(a_{\kappa\theta}) = \Phi_0(s(\bar{y})) \neq 0.$$

If  $p$  is furthermore linear in its derivative of order  $|\theta|$ , we can take  $|\alpha| \leq 2\rho - |\theta| + 2$  provided we consider  $\mathcal{L}_{p|\bar{y}}^{(2\rho-2|\theta|+2)}$ .

### 2.4.3 Algorithm

We consider here again an orderly ranking  $\leq$  on  $\mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]]$ . Let  $(A, H)$  be a regular differential system in  $\mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]]$  and  $\Psi_0 : \mathcal{S}[\Theta Y \setminus \Theta^+ \mathfrak{L}(A)] \rightarrow \mathcal{K}$  be a regular initial condition to which we associate  $\omega \in \mathcal{S}^n$  such that for any  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\omega_i = \sum_{\delta^\beta y_i \notin \Theta^+ \mathfrak{L}(A)} \Psi_0(\delta^\beta y_i) \frac{t^\beta}{\beta!}.$$

According to Proposition 2.3.4  $\Psi_0$  extends in a unique way to  $\Psi : \mathcal{S}[[y_1, \dots, y_n]] \rightarrow \mathcal{K}$  that is associated to the power series solution  $\tilde{y} = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^m} \Psi(\delta^\beta y) \frac{t^\beta}{\beta!}$ .

We have  $\omega \equiv \tilde{y} \pmod{(t)^{r_0}}$  where  $r_0$  is the minimal order of the leaders of  $A$ . We want to compute, up to a certain order,

$$\bar{y}_i = \tilde{y}_i - \omega_i = \sum_{\delta^\beta y_i \in \Theta^+ \mathfrak{L}(A)} \Psi(\delta^\beta y_i) \frac{t^\beta}{\beta!}, \text{ for all } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Let  $r$  be the maximal order of the leaders of  $A$ . If we have  $\bar{y} \in \mathcal{S}^n$  s.t.  $\omega + \bar{y} \equiv \tilde{y} \pmod{(t)^\rho}$  for  $\rho > r$ , we can compute  $\bar{z} \in \mathcal{S}^n$  such that  $\bar{z} \equiv 0 \pmod{(t)^\rho}$  and  $\omega + \bar{y} + \bar{z} \equiv \tilde{y} \pmod{(t)^{2\rho-2r}}$ . That consists in computing the coefficients  $\Phi_\alpha(\tilde{y}_i)$  s.t.  $\delta^\alpha y_i \in \Theta^+ \mathfrak{L}(A)$  and  $\rho \leq |\alpha| < 2\rho - r$ . The whole process relies on Proposition 2.4.2.

Let  $a$  be an element of  $A$  with leader  $\delta^\theta y_\kappa \in \mathfrak{L}(A)$ . Evidently  $\tilde{y}$  is a zero of  $a$  and  $|\theta|$  is equal to  $r$  or lower. According to Proposition 2.4.2, for any  $\alpha \in \theta + \mathbb{N}^m$  with  $|\alpha| < 2\rho - r$  we can express  $\Phi_\alpha(\bar{z}_\kappa)$  as a linear combination of  $\{\Phi_\beta(\omega_i), \Phi_\beta(\bar{y}_i), \Phi_\beta(\bar{z}_i) \mid \delta^\beta y_i < \delta^\theta y_\kappa\}$ . The coefficients of this linear combination arise from the coefficients of  $\mathcal{L}_{a|\omega+\bar{y}}^{(2\rho-2r)}$ . We shall in fact refer to this relationship as  $\Phi_{\alpha-\theta} \left( \mathcal{L}_{a|\bar{y}}^{(2\rho-2r)}(z) \right)$  since it arises by inspecting of the coefficient of  $t^{\alpha-\theta}$  in  $\mathcal{L}_{a|\omega+\bar{y}}^{(2\rho-2r)}(\bar{z})$ .

Take  $\delta^\alpha y_\kappa$  to be the lowest derivative of order  $\rho$  in  $\Theta^+ \mathfrak{L}(A)$ . It is the proper derivative of the leader  $\delta^\theta y_\kappa$  of an element  $a$  of  $A$ . We can determine  $\Phi_\alpha(\bar{z}_\kappa)$  thanks to the relationship  $\Phi_{\alpha-\theta} \left( \mathcal{L}_{a|\bar{y}}^{(2\rho-2r)}(z) \right)$ . The relationship expresses  $\Phi_\alpha(\bar{z}_\kappa)$  linearly in terms of the coefficients of  $\bar{y}$  and  $\omega$ . It is therefore completely determined. Taking then the derivatives  $\delta^\alpha y_\kappa$  of  $\Theta^+ \mathfrak{L}(A)$  increasingly from there we can compute the corresponding coefficients  $\Phi_\alpha(\bar{z}_\kappa)$  in terms of the coefficients of  $\bar{y}, \omega$  and the previously computed coefficients of  $\bar{z}$ . As a result we can compute all the  $\Phi_\alpha(\bar{z}_\kappa)$  that correspond to derivative  $\delta^\alpha y_\kappa \in \Theta^+ \mathfrak{L}(A)$  with  $\rho \leq |\alpha| < 2\rho - r$ .

Let us point out that at each step there might be distinct possible pairs  $(\beta, \kappa) \in \mathbb{N}^m \times \{1, \dots, n\}$  corresponding to distinct elements  $a$  of  $A$ . As we are ensured of the existence and uniqueness of the power series solution of  $(A, H)$  we are computing, any will do.

In the precise algorithm, there is an extra technical point around the fact that not all the elements of  $A$  have the same order. We need to incorporate the element of  $A$  order by order. An element  $a$  in  $A$  of order  $r$  is taken in account when we have an approximation at order  $r + 1$  of the solution. That approximation is previously obtained thanks to the lower order equations.

Also it is possible to take  $\omega \in \mathcal{S}^n$  without imposing that  $\Phi_\beta(\omega_i) = 0$  for  $\delta^\beta y_i \in \Theta^+ \mathfrak{L}(A)$ . The only requirement is that  $\Phi_0(a(\omega_i)) = 0$  for all  $a \in A$  and  $\Phi_0(h(\omega_i)) \neq 0$  for all  $h \in H$ .

**Algorithm 2.4.5***Newton-Power-Series-Solution**Input:*

- $\mathcal{S} \llbracket y_1, \dots, y_n \rrbracket$  endowed with an orderly ranking  $\leq$
- $(A, H)$  a regular differential system in  $\mathcal{S} \llbracket y_1, \dots, y_n \rrbracket$ .
- $\omega \in \mathcal{S}^n$  a regular initial condition for  $(A, H)$
- $R$  a positive integer

*Output:*  $\bar{y} \in \mathcal{S}^n$  s.t.  $\bar{y} \equiv \tilde{y} \pmod{(t)^R}$  where  $\tilde{y}$  is the power series solution of  $(A, H)$  with initial condition  $\omega$ .

$r :=$  the minimal order of the elements of  $\mathfrak{L}(A)$ ;

$\rho := r + 1$ ;

$\bar{y} := 0$ ;

while  $\rho \leq R$  do

$B := A \cap \mathcal{S}[\Theta_r Y]$ ;

$r_1 := \begin{cases} R & \text{if } A \setminus B = \emptyset \\ \min\{\text{ord}(u) \mid u \in \mathfrak{L}(A \setminus B)\} & \text{otherwise} \end{cases}$

if each element of  $B$  is linear in the  $r^{\text{th}}$  order derivatives then

$\rho_1 := \min\{2\rho - r + 2, r_1 + 1, R\}$ ;

elif each element of  $B$  is of degree one or less in the  $r^{\text{th}}$  order derivatives then

$\rho_1 := \min\{2\rho - r + 1, r_1 + 1, R\}$ ;

else

$\rho_1 := \min\{2\rho - r, r_1 + 1, R\}$ ;

fi;

$\bar{\omega} := \omega \pmod{(t)^{\rho_1}}$ ;

$L := \mathcal{L}_{B|\bar{\omega}+\bar{y}}^{(\rho_1-r)}$ ;

$U := \{u \in \Theta^+ \mathfrak{L}(B) \text{ s.t. } \rho \leq \text{ord}(u) < \rho_1\}$ ;

for  $\delta^\alpha y_\kappa \in U$  by increasing rank do

$l :=$  an element of  $L$  with leader  $\delta^\theta y_\kappa$  s.t.  $\theta \prec \alpha$ ;

$z_\alpha :=$  the solution of  $\Phi_{\alpha-\theta}(l(z)) = 0$ ;

od;

$\bar{y} := \bar{y} + \sum_{\delta^\alpha y_\kappa \in U} z_\alpha \frac{t^\alpha}{\alpha!}$ ;

$r := \begin{cases} r & \text{if } A \setminus B = \emptyset \text{ or } \rho_1 < r_1 + 1 \\ r_1 & \text{otherwise} \end{cases}$

$\rho := \rho_1$ ;

od;

return  $(\bar{\omega} + \bar{y})$ ;

$B$  is the subset of  $A$  consisting of the elements of  $A$  of order  $r$  or less and  $r_1$  is the minimal order of the leaders of  $A$  not in  $B$ . At some point  $B = A$



and then  $r_1$  become irrelevant. The piece of power series solution we compute,  $\bar{y} \in \mathcal{S}^n$ , is such that  $\Phi_\alpha(\bar{y}_i) = 0$  for  $\delta^\alpha y_i \notin \Theta^+ \mathfrak{L}(A)$ .

The invariant of the **while** loop is

$$I_0 : \quad \omega + \bar{y} \equiv \tilde{y} \pmod{(t)^\rho}.$$

The invariant is true before the **while** loop as  $\omega \equiv \tilde{y} \pmod{(t)^{r+1}}$  for  $r$  the minimal order of the leaders of  $A$ .  $L$  is the linearisation at  $\bar{\omega} + \bar{y}$  and at order  $\rho_1 - r$  of  $B$ . It is a linear d-triangular set s.t.  $\mathfrak{L}(L) = \mathfrak{L}(B)$ . Its coefficients are used to compute the  $\Phi_\alpha(\bar{y})$  for  $\rho \leq |\alpha| < \rho_1$  within the **for** loop. Proposition 2.4.2 and Proposition 2.4.4 ensure the exactness of the computation.

## 2.5 Experimental comparisons

We made a first implementation of our algorithm in MAPLE and made an experimental comparison with the libraries *rif* [65, 80] and *diffalg* [16, 14]. As of in MAPLE 8 those codes deal only with initial conditions where the coefficients are indeterminates. Our code works without distinction for both numerical (with specified values) and generic (with indeterminates) initial condition. At our request A. Witkopf adapted *rif'* to handle numerical initial conditions. We shall report here on comparisons with generic initial conditions.

We present a selection of examples where our implementation performs better than *rif* and *diffalg*. On the first example, our algorithm performs clearly better. The results are nonetheless not clear cut in general. One has to point out that this first example is linear so that basically the power series solution is computed through the associated recurrences that are of finite length. In the other cases the arithmetic operations on power series lessens the impact of the quadratic character of the algorithm. Series computations were indeed made in the *zealous* way [39] that is in their polynomial form and we only used the standard algebraic operations on polynomials in MAPLE. The use of more appropriate coding of the differential polynomials (as straight line programs for instance) and of arithmetic operations and derivations on power series solution is underway. We expect to report on a more overall success soon.

We present the selected examples as systems of differential equations. One will easily recover the regular differential systems underlying those. The leaders of the differential polynomials together, together with coefficients, are in the left hand sides of the equations. Initial conditions are given in Riquier's style. The library *rif* has a tool to produce them. We present the timings by plotting the logarithm of the computation time as function of the logarithm of the order up to which the power series solution is computed. Computation times were obtained on the machine Jules of MEDICIS (<http://medicis.polytechnique.fr>).

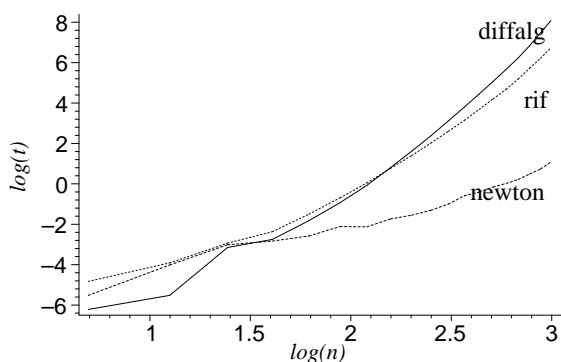
**Example 1** We consider the differential system

$$\begin{cases} (1+y)u_{xx} = (x^2 + xy + y^2)v_y \\ v_x = (y^2 + y + 1)u \end{cases}$$

A regular initial condition at  $(x, y) = (0, 0)$  is provided by the assignment of values to  $u, u_y, u_{yy}, \dots$  and to  $v, v_y, v_{yy}, \dots$ . It thus amounts to have three arbitrary power series in  $y$ . The initial condition can be given in Riquier's style :

$$(\bar{u}, \bar{v}) = (f(y) + g(y)x, h(y) + f(0)x)$$

where  $f, g, h$  are power series in  $y$ . We assume they have indeterminates as coefficients.



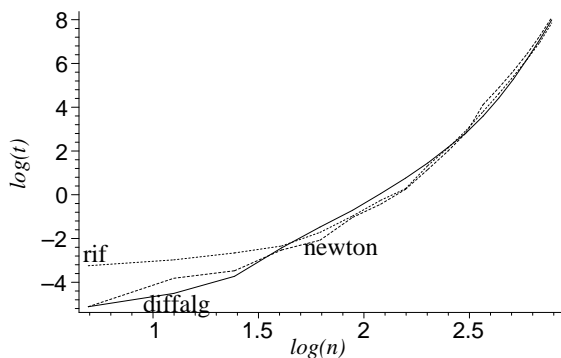
**Example 2** We consider the spread disease system

$$\begin{cases} v_t = -r v u \\ b u_{xx} = u_t - r v u + a u \end{cases}$$

with initial condition

$$(\bar{u}, \bar{v}) = (f(x), g(t) + h(t)x),$$

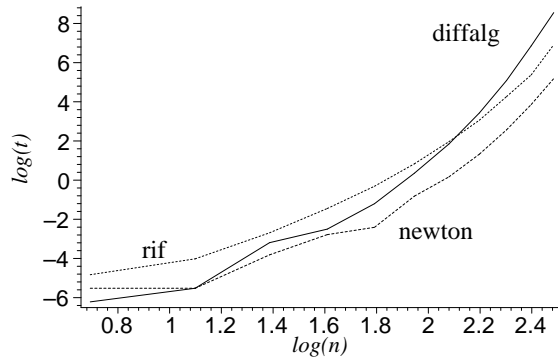
where  $f, g, h$  are power series, in  $x$  or  $t$  as specified within parentheses, with indeterminate coefficients.



**Example 3** We consider the differential equation

$$u_x u_{xx} = (\alpha u u_x - \beta u_t)(1 - tu_x)^3$$

with initial condition  $\bar{u} = f(t) + g(t)x + \frac{(\alpha f(0)g(0) - \beta f'(0))}{2g(0)}x^2$ , where  $f$  and  $g$  are power series in  $t$  with indeterminate coefficients.



**Acknowledgments** : to the referees for corrections, to M. Barkatou, M. Bronstein, A. Quadrat and J-A. Weil for discussions.



# Conclusion

Dans cette partie, nous avons proposé une alternative au calcul par évaluation-dérivation pour le calcul de séries solutions de certains systèmes polynomiaux d'équations aux dérivées partielles (les systèmes différentiels réguliers) vérifiant des conditions initiales prescrites en un point régulier (conditions initiales régulières). La méthode proposée est tributaire des algorithmes de base pour multiplier des séries formelles multivariées. Elle sera grandement améliorée si l'on emploie des méthodes plus efficaces pour cela (ex. [69]).

Par ailleurs, une approche modulaire comme proposée pour une équation différentielle ordinaire peut être envisagée pour tenir compte de la croissance des coefficients. Il s'agit alors de remonter les calculs en s'arrêtant à une borne sur les coefficients à calculer déterminée au préalable. En général, cette approche ne marche que sous certaines conditions sur le classement choisi sur les inconnues et leurs dérivées. On peut s'en convaincre avec l'exemple célèbre de S. Kovalevska pour l'équation de la chaleur unidimensionnelle.

$$u_t = u_{x,x}, u(x, 0) = \frac{1}{1-x}.$$

F. Lemaire [49] a déterminé les classements pour lesquels la série formelle solution converge dès que les conditions initiales convergent. Il est donc tout à fait envisageable de reprendre les méthodes de séries majorantes employées pour cette démonstration en vue d'obtenir des bornes explicites sur les coefficients.



## Deuxième partie

### Systemes d'équations aux dérivées partielles linéaires avec singularités





# Introduction

Dans cette seconde partie de la thèse, nous construisons un algorithme de réduction du rang des systèmes de Pfaff analytiques (formels) complètement intégrables à croisements normaux en un point singulier que nous plaçons à l'origine.

Dans le cas d'une seule variable (cas  $n = 1$ ), un système de Pfaff n'est autre qu'un système différentiel linéaire ordinaire. Les solutions d'un tel système en un point singulier ont été bien étudiées (ex. [76, 79, 5, 6, 3]) et il existe des algorithmes pour les calculer [24, 78, 8, 10]. En revanche l'étude du cas  $n > 1$  a été moins développée malgré un certain nombre de travaux [27, 33, 75, 29, 22, 30, 23, 53, 56]. En ce qui concerne la recherche de solutions formelles d'équations aux dérivées partielles linéaires, citons les travaux de F. Aroca et J. Cano [1], M. Saito, B. Sturmfels et N. Takayama [66], et J. van der Hoeven [38].

Dans toute la suite, nous étudions les systèmes de Pfaff formels à croisements normaux à l'origine :

$$\begin{cases} x_1^{p_1+1} \frac{\partial Y}{\partial x_1} - A^{(1)}Y & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ x_n^{p_n+1} \frac{\partial Y}{\partial x_n} - A^{(n)}Y & = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où, pour  $1 \leq i \leq n$ ,  $A^{(i)}$  est une matrice  $m \times m$  à coefficients dans l'anneau  $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$  et  $p_i$  est un entier naturel. Le lieu singulier du système (2.1) est l'union des hyperplans de coordonnées  $x_1 \dots x_n = 0$ . Le vecteur inconnu  $Y$  est un vecteur de dimension  $m$ . Les solutions formelles d'un tel système appartiennent à une extension différentielle à déterminer  $\mathcal{L}$  de  $K_n = \mathbb{C}((x_1, \dots, x_n))$ . Par simplicité et sans restriction de la généralité, nous supposons désormais qu'aucune des matrices  $A^{(i)}$  n'est identiquement nulle. Par abus de langage, nous appelons système de Pfaff à la fois le système d'équations aux dérivées partielles (2.1) et sa forme de Pfaff associée :

$$dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i^{p_i+1}} dx_i \right) Y.$$

Notons  $\Delta_i$  les opérateurs différentiels apparaissant au premier membre du

système (2.1) :

$$\Delta_i(Y) = \frac{\partial Y}{\partial x_i} - \frac{A^{(i)}}{x_i^{p_i+1}} Y.$$

Par définition, le système de Pfaff (2.1) est dit **complètement intégrable** si les opérateurs  $\Delta_i$  commutent deux à deux :

$$\Delta_i \Delta_j = \Delta_j \Delta_i \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n. \quad (2.2)$$

On vérifie aisément que cette condition s'écrit aussi :

$$x_i^{p_i+1} \frac{\partial A^{(j)}}{\partial x_i} + A^{(j)} A^{(i)} = x_j^{p_j+1} \frac{\partial A^{(i)}}{\partial x_j} + A^{(i)} A^{(j)} \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n.$$

Notez la similarité avec les notions de cohérence et de  $\Delta$ -polynômes utilisées dans la première partie.

La valuation  $x_i$ -adique de la matrice  $A^{(i)}$  est sa valuation en tant que série formelle en  $x_i$  à coefficients dans l'anneau  $M_m(\mathbb{C}[[x_i]])$  (l'anneau  $\mathbb{C}[[x_i]]$  est l'anneau des séries formelles en toutes les indéterminées  $x_j$  avec  $j \neq i$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ ). Cette valuation existe toujours sous l'hypothèse de non nullité des  $A^{(i)}$ . Supposons que le système (2.1) ait été normalisé de telle sorte que chaque matrice  $A^{(i)}$  soit de  $x_i$ -valuation nulle ( $\text{val}_i(A^{(i)}) = 0$ ). Par définition, on appelle alors **rang** du système de Pfaff (2.1) le  $n$ -uplet  $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$ .

Dans le chapitre 3, nous proposons des méthodes de calcul des solutions formelles du système de Pfaff complètement intégrable (2.1) dans le cas où son rang  $\underline{p}$  est nul ( $\underline{p} = (0, \dots, 0)$ ). Rappelons qu'un tel système de Pfaff est appelé système de Pfaff de **première espèce**. On sait de plus [33, 75] que le système de Pfaff de première espèce (2.1) admet une matrice fondamentale de solutions de la forme :

$$T x_1^{B^{(1)}} \dots x_n^{B^{(n)}},$$

où  $T \in GL_m(K_n)$  et les matrices  $B^{(i)}$  sont des matrices constantes qui commutent deux à deux.

Nous donnons une nouvelle démonstration constructive de ce résultat sous une hypothèse de généricité (Théorème 3.2.1). Mais contrairement au cas différentiel ordinaire, nous ne savons pas comment ramener le cas général à cette situation générique par un procédé fini. C'est pourquoi nous proposons de rendre effective les démonstrations de l'existence d'une telle matrice fondamentale de solutions données dans [75] et [33]. Tout d'abord, ces auteurs montrent, par des procédés différents, l'existence d'une transformation de jauge  $Y = PW$  avec  $P \in GL_m(\mathcal{O}_n)$ , qui ramène le système de première espèce (2.1) à un système de première espèce

$$dW = \left( \sum_{i=1}^n \frac{C^{(i)}}{x_i} dx_i \right) W, \quad (2.3)$$

où les matrices  $C^{(i)}$  sont monomiales de valuation  $\text{val}_i(C^{(i)}) = 0$ . Une transformation de jauge diagonale  $W = \text{diag}(x^{\alpha^{(1)}}, \dots, x^{\alpha^{(m)}})Z$  (on note comme d'habitude  $x^{\alpha^{(i)}}$  le monôme  $x_1^{\alpha_1^{(i)}} \dots x_n^{\alpha_n^{(i)}}$ ) permet alors de ramener le système de première espèce (2.3) à un système de première espèce

$$dZ = \left( \sum_{i=1}^n \frac{B^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Z,$$

où les matrices  $B^{(i)}$  sont constantes (non nulles). Les n-uplets  $\alpha^{(i)}$  peuvent s'obtenir explicitement à partir du système de première espèce (2.1). La matrice  $T$  cherchée est alors la matrice  $P \text{diag}(x^{\alpha^{(1)}}, \dots, x^{\alpha^{(m)}})$ . Les matrices  $P$  et  $C^{(i)}$  du système (2.3) obtenues dans les deux démonstrations ne sont pas forcément les mêmes. Néanmoins, dans la situation générique, les matrices  $P$  et  $C^{(i)}$  du système (2.3) obtenues dans les deux démonstrations sont les mêmes. De plus, dans cette situation, les matrices  $C^{(i)}$  sont constantes.

Nous montrons, pour les deux approches, qu'il suffit de connaître un nombre fini de termes de la matrice  $P$  pour déterminer les matrices  $C^{(i)}$  (et donc les matrices exposants de monodromie  $B^{(i)}$ ). Nous explicitons ce nombre de termes et nous le relierons directement aux coefficients du système initial (2.1). Puis nous montrons comment calculer la matrice  $P$  à n'importe quel ordre de troncature par la méthode de R. Gérard et A.H.M. Levelt [33].

Les chapitres 4 et 5 portent sur la **réduction du rang** d'un système de Pfaff complètement intégrable (2.1). Il s'agit de trouver une transformation de jauge  $Y = TZ$  avec  $T \in GL_m(K_n)$  qui transforme le système de Pfaff complètement intégrable (2.1) en un système de Pfaff (ce dernier est nécessairement complètement intégrable) à croisement normaux

$$dZ = \left( \sum_{i=1}^n \frac{B^{(i)}}{x_i^{q_i+1}} dx_i \right) Z, \quad (2.4)$$

dont le rang  $\underline{q} = (q_1, \dots, q_n)$  vérifie  $\underline{q} \prec \underline{p}$ .

La relation d'ordre  $\preceq$  sur  $\mathbb{N}^n$  est définie par

$$\underline{q} \preceq \underline{p} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, q_i \leq p_i.$$

En itérant le procédé autant qu'il est possible, on obtient un système de rang minimal, résolvant ainsi le problème de la **réduction complète du rang**.

Pour réaliser la réduction du rang (et donc la réduction complète), nous avons cherché à appliquer l'une des méthodes existantes de réduction complète des systèmes différentiels linéaires ordinaires (ex. [7, 68, 50]) en privilégiant successivement chaque variable  $x_i$ . Apparaissent des difficultés de deux types.

1. Réduire un rang sans faire croître les autres.
2. Rester dans la classe des systèmes de Pfaff complètement intégrables à croisements normaux.

Dans le chapitre 4, nous rappelons deux algorithmes à présent classiques pour réduire complètement le rang dans le cas différentiel ordinaire : l'algorithme de Moser [55, 7] et l'algorithme de Levelt [50]. Nous avons d'abord essayé d'adapter l'algorithme de Moser [7] dans le cas  $n = 2$ . Nous avons observé que cet algorithme ne posait problème que sur un seul point (paragraphe 4.1.2, cas  $s = r$ ). Si on supprime celui-ci, on obtient, à peu de choses près, ce que nous appelons dans la suite la version descendante de l'algorithme de Levelt [50], par opposition à sa version ascendante. Malgré leur similitude algorithmique, les algorithmes de Moser et de Levelt reposent sur des fondements théoriques différents, c'est-à-dire critère de Moser d'une part [55] et langage des réseaux d'autre part [32]. Une traduction de l'algorithme de Moser dans le langage des réseaux a été proposée par E. Corel [25].

Nous mettons ensuite en évidence la dualité entre les versions ascendantes et descendantes de l'algorithme de Levelt (Corollaire 4.2.9). Cette propriété est évoquée dans [26]. Elle joue un rôle important dans la suite de notre travail.

Nous terminons le chapitre en étudiant la complexité des algorithmes de Moser et de Levelt. Pour déterminer le **vrai rang de Poincaré**, il faut connaître les  $mp$  premiers coefficients dans le développement en série de la matrice du système différentiel, où  $m$  est la taille du système et  $p$  son rang. Si  $N \geq mp$  désigne le nombre de coefficients connus dans le développement en série, nous montrons que la complexité en opérations arithmétiques dans le pire des cas des algorithmes de Moser et de Levelt est en  $\mathcal{O}(Npm^{\omega+1})$  ( $m^\omega$  est le coût de la multiplication de deux matrices  $m \times m$  à entrées dans  $\mathbb{C}$  : on a  $2 \leq \omega \leq 3$ ). On obtient en sortie les  $N$  premiers coefficients d'un système équivalent de rang minimal (donc de rang égal au vrai rang de Poincaré) et la transformation de jauge  $Y = TZ$  (qui est polynomiale) correspondante.

Dans le chapitre 5, nous adaptions l'algorithme de Levelt au cas  $n = 2$ , c'est-à-dire au cas d'un système de Pfaff complètement intégrable de la forme

$$dY = \left( \frac{A(x, y)}{x^{p+1}} dx + \frac{B(x, y)}{y^{q+1}} dy \right) Y. \quad (2.5)$$

La restriction à ce cas s'explique par l'utilisation de l'existence d'une forme de Smith pour les matrices dont les entrées appartiennent à un anneau principal (ici il s'agit des anneaux  $\mathbb{C}[[y]]$  et  $\mathbb{C}[[x]]$ ).

Une partie de ce qui est présenté dans ce chapitre a fait l'objet d'une publication avec M. Barkatou [11]. Nous présentons dans un premier temps plusieurs caractérisations bien connues des systèmes de Pfaff dits **réguliers**, c'est-à-dire les systèmes de Pfaff (2.1) équivalents à un système de Pfaff de première espèce par une transformation de jauge  $Y = TZ$ , avec  $T \in GL_m(K_n)$ . Nous donnons ensuite la construction de réseaux sous-jacents à l'algorithme de Levelt dans le cas  $n = 2$ . La dualité, mise en lumière au chapitre précédent, nous permet d'en déduire que les réseaux construits sont libres dans le cas  $n = 2$  et nous donne un nouveau critère de régularité pour  $n$  arbitraire (Théorème 5.2.15).

Le Théorème 5.2.10 et la liberté des réseaux construits dans le cas  $n = 2$  entraînent un résultat de réduction complète pour un système de Pfaff (2.5) (Théorème 5.2.17). Nous terminons le chapitre en montrant comment on peut adapter l'algorithme de Levelt au cas  $n = 2$ , et nous en montrons la validité à l'aide du Théorème 5.2.10. L'idée consiste à voir le système aux dérivées partielles  $x^{p+1} \frac{\partial Y}{\partial x} = A(x, y)Y$  comme un système différentiel de paramètre  $y$  et à appliquer la version descendante de l'algorithme de Levelt aussi soigneusement que possible. On obtient ainsi un système de Pfaff complètement intégrable à croisements normaux en 0 équivalent au système de départ (2.5). D'un point de vue algorithmique, nous appliquons la méthode du pivot de Gauss à une matrice appartenant à  $M_m(\mathbb{C}[[y]])$  en choisissant des pivots de valuation minimale en  $y$ . L'algorithme que nous obtenons prend en entrée un système de Pfaff (2.5) et retourne un système équivalent

$$dW = \left( \frac{\tilde{A}(x, y)}{x^{\tilde{p}+1}} dx + \frac{\tilde{B}(x, y)}{x^{\tilde{q}+1}} dy \right) W$$

avec  $(\tilde{p}, \tilde{q}) \preceq (p, q)$  et  $\tilde{p}$  minimal. Plus précisément,  $\tilde{p}$  est égal au **vrai rang de Poincaré** du système différentiel  $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{A(x, y)}{x^{p+1}} Y$ .

En appliquant l'algorithme de Levelt à ce dernier système, et en cherchant à réduire cette fois-ci  $\tilde{q}$  (cela est possible en permutant le rôle joué par les systèmes  $\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\tilde{A}(x, y)}{x^{\tilde{p}+1}} W$  et  $\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\tilde{B}(x, y)}{y^{\tilde{q}+1}} W$ ), nous obtenons un système de Pfaff complètement intégrable à croisements normaux équivalent au système (2.5)

$$dZ = \left( \frac{\bar{A}(x, y)}{x^{\bar{p}+1}} dx + \frac{\bar{B}}{y^{\bar{q}+1}} dy \right) Z,$$

où  $\bar{p} = \tilde{p}$  et  $\bar{q}$  est égal au vrai rang de Poincaré du système  $\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{B(x, y)}{y^{q+1}} Y$ .

**Notations** Dans toute la suite, nous employons les notations suivantes.

- $M_m(R)$  est l'anneau des matrices carrées de taille  $m$  à coefficients dans l'anneau  $R$ .
- $GL_m(R)$  désigne le groupe des matrices inversibles de l'anneau  $M_m(R)$ .
- Étant donnée une matrice  $A \in M_m(\mathbb{C})$ ,  $\text{spec}(A)$  est l'ensemble des valeurs propres de la matrice  $A$ .
- $\mathbf{I}_m$  est la matrice identité de taille  $m \times m$ .
- $0_{r \times s}$  est la matrice nulle de taille  $r \times s$ .
- $0_r$  est la matrice nulle de taille  $r \times r$ .
- $\mathfrak{M} = (x_1, \dots, x_n)$  est l'idéal maximal de l'anneau  $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ .
- $K_n$  désigne le corps des fractions de  $\mathcal{O}_n$ . On a donc  $K_n = \mathbb{C}((x_1, \dots, x_n))$ .
- $\mathbb{C}[[x_i]]$  pour  $1 \leq i \leq n$  est l'anneau des séries formelles en les  $x_j$ ,  $j \neq i$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .
- $\mathbb{C}((x_i))$  est le corps des fractions de  $\mathbb{C}[[x_i]]$ .
- $(\mathcal{O}_n)_{(i)}$  pour  $1 \leq i \leq n$  désigne l'anneau  $\mathbb{C}((x_i))[[x_i]]$  : c'est l'anneau des séries formelles en  $x_i$  à coefficients dans  $\mathbb{C}((x_i))$ .

- $(K_n)_{(i)}$  pour  $1 \leq i \leq n$  est le corps des fractions de  $(\mathcal{O}_n)_{(i)}$ .
- Étant donné  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $x^\alpha$  désigne le monôme  $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ .
- $(0)^n$  est le n-uplet dont les coordonnées sont toutes égales à 0.
- $x_1 \dots x_n = 0$  est l'union des hyperplans de coordonnée  $x_i = 0$  :  

$$\bigcup_{i=1}^n \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n : x_i = 0\}.$$
- $V$  est un  $K_n$ -espace vectoriel de dimension  $m$ .
- $\Lambda$  désigne un  $\mathcal{O}_n$ -réseau de  $V$ , à savoir un  $\mathcal{O}_n$ -module de type fini engendrant  $V$  en tant que  $K_n$ -espace vectoriel.
- $V_{(i)}$  est le  $(K_n)_{(i)}$ -espace vectoriel de dimension  $m$   $(K_n)_{(i)} \otimes_{\mathcal{O}_n} \Lambda$ .
- $\Lambda_{(i)}$  est le  $(\mathcal{O}_n)_{(i)}$ -réseau de  $V_{(i)}$  égal à  $(\mathcal{O}_n)_{(i)} \otimes_{\mathcal{O}_n} \Lambda$ .
- Étant donné  $A \in M_m(\mathcal{O}_n)$ , on note  $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} A_\alpha x^\alpha$  son développement en série en les variables  $(x_1, \dots, x_n)$ .
- Étant donné  $B$  et  $1 \leq i, j \leq m$ ,  $B_{i,j}$  désigne le coefficient  $(i, j)$  de la matrice  $B$ . En particulier, si  $A \in M_m(\mathcal{O}_n)$ ,  $A_{\alpha,i,j}$  est le coefficient  $(i, j)$  de la matrice  $A_\alpha$ .

# Chapitre 3

## Systèmes de Pfaff de première espèce

Notre objectif dans ce chapitre est le calcul effectif des solutions formelles des systèmes de Pfaff de première espèce. Par définition, un **système de Pfaff de première espèce** est un système de Pfaff complètement intégrable à croisements normaux en l'origine dont le rang  $\underline{p}$  vérifie  $p_i = 0$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Autrement dit, un système de Pfaff de première espèce est un système de Pfaff complètement intégrable qui s'écrit sous la forme

$$dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Y \quad (3.1)$$

où les matrices  $A^{(i)}$  sont de taille  $m \times m$  à coefficients dans  $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$  et  $Y$  est un vecteur d'inconnues de dimension  $m$ .

R. Gérard et A.H.M. Levelt [33] et T. Takano et M. Yoshida [75], ont montré par des méthodes différentes le résultat suivant.

### **Théorème 3.0.1** ( [33, 75] )

*Étant donné un système de Pfaff de première espèce*

$$dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Y,$$

*il existe une transformation de jauge  $Y = TZ$  où  $T \in M_m(\mathcal{O}_n)$  avec  $\det(T) \neq 0$  telle que le système obtenu soit un système de Pfaff de première espèce de la forme*

$$dZ = \left( \sum_{i=1}^n \frac{B^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Z \quad (3.2)$$

*où les matrices  $B^{(i)}$  appartiennent à  $M_m(\mathbb{C})$ .*

Il découle de ce résultat que le système (3.1) possède une matrice fondamentale de solutions formelles de la forme

$$T x_1^{B^{(1)}} \cdots x_n^{B^{(n)}} \quad (3.3)$$

où  $T \in M_m(\mathcal{O}_n)$  avec  $\det(T) \neq 0$  et les matrices  $B^{(i)}$  sont constantes et commutent deux à deux. En effet la matrice  $x_1^{B^{(1)}} \cdots x_n^{B^{(n)}}$  est une matrice fondamentale de solutions du système de Pfaff de première espèce “constant” (3.2).

Pour calculer une matrice fondamentale de solutions du système (3.1) de la forme (3.3), il s’agit donc de calculer une transformation de jauge  $Y = TZ$  qui transforme le système (3.1) en un système (3.2) dont on puisse calculer les matrices  $B^{(i)}$ .

Nous rappelons au paragraphe 3.1 comment calculer une telle transformation de jauge  $Y = TZ$  dans le cas ordinaire (cas  $n = 1$ ). On distingue deux situations.

- La situation générique, décrite au paragraphe 3.1.1, où l’on peut prendre comme matrice  $B^{(1)}$  le terme constant  $A_0^{(1)}$ . La transformation de jauge  $Y = TZ$  se calcule alors en résolvant un système différentiel linéaire auquel satisfait la matrice  $T$ .
- La situation non générique, décrite au paragraphe 3.1.2. On peut alors calculer une transformation de jauge  $Y = PZ$  où  $P$  est polynomiale pour se ramener à la situation générique.

Nous montrons au paragraphe 3.2 que la méthode décrite pour un système différentiel ordinaire de première espèce “générique” s’adapte bien à n’importe quel système de Pfaff de première espèce “générique” (3.1) avec  $n \geq 2$  quelconque. Cela donne, entre autre, une nouvelle démonstration du Théorème 3.0.1 sous l’hypothèse de généricité. En revanche, il ne semble pas que l’on puisse se ramener à la situation générique par un procédé fini quand le système de Pfaff de première espèce (3.1) ne vérifie pas cette propriété générique.

Pour calculer une transformation de jauge  $Y = TZ$ , nous allons nous inspirer des démonstrations du Théorème 3.0.1 données dans [33, 75] et en tirer, pour chacune des démonstrations, une méthode de calcul d’une matrice fondamentale de solutions formelles de la forme (3.3). Ce qui signifie que l’on peut calculer la matrice  $T$  à n’importe quel ordre de précision et que l’on peut calculer les matrices  $B^{(i)} \in M_m(\mathbb{C})$  du système de Pfaff de première espèce obtenu après la transformation de jauge  $Y = TZ$ , dès que l’on connaît la matrice  $T$  à un ordre de précision assez grand.

Les démonstrations données dans [33, 75], bien que différentes, se déroulent en deux étapes. Dans un premier temps, les auteurs déterminent, par des procédés différents, une transformation de jauge  $Y = PW$  où  $P \in GL_m(\mathcal{O}_n)$  qui conduit à un système de Pfaff de première espèce

$$dW = \left( \sum_{i=1}^n \frac{C^{(i)}}{x_i} dx_i \right) W \quad (3.4)$$

où les matrices  $C^{(i)}$  sont monomiales (cela veut dire que les coefficients de la matrice  $C^{(i)}$  sont des monômes). La matrices  $P$  et le système (3.4) obtenus



dans chacune des démonstrations ne sont pas nécessairement les mêmes. Dans un second temps, une transformation de jauge diagonale

$$W = \text{diag}(x^{\alpha^{(1)}}, \dots, x^{\alpha^{(m)}})Z,$$

où les  $\alpha^{(i)}$  appartiennent à  $\mathbb{N}^n$ , permet de ramener le système (3.4) à un système de Pfaff de première espèce

$$dZ = \left( \sum_{i=1}^n \frac{B^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Z$$

où les matrices  $B^{(i)}$  sont constantes. Dans les deux démonstrations, les  $\alpha^{(i)}$  s'obtiennent explicitement à partir des matrices  $A_{(0)^n}^{(i)}$ .

La démonstration du Théorème 3.0.1 donnée par R. Gérard et A.H.M. Levelt [33] n'apparaît pas effective. Leur idée a été d'introduire une notion de décomposition de Dunford pour les endomorphismes d'espace vectoriel filtré complet et de l'appliquer aux opérateurs différentiels  $\Delta_{i,1} = x_i \Delta_i$ . Les parties semi-simples  ${}^s\Delta_{i,1}$  associées aux opérateurs  $\Delta_{i,1}$  sont prépondérantes dans la démonstration : la matrice  $P$  correspond à une base de vecteurs propres communs aux opérateurs  ${}^s\Delta_{i,1}$ . Nous rappelons la démonstration de la décomposition de Dunford au paragraphe 3.3, ainsi que celle de plusieurs autres propositions se trouvant dans [33], indispensables pour comprendre comment nous allons rendre effective l'approche de Gérard et Levelt.

Pour calculer effectivement une matrice fondamentale de solutions (3.3) par l'approche de Gérard et Levelt, nous calculons la troncature de  $P$  à un ordre suffisamment grand  $\gamma$  défini en (3.17), dépendant du système (3.1). La connaissance de  $P$  à l'ordre de troncature  $\gamma$  permet alors de calculer les matrices  $B^{(i)}$ . Une fois connues les matrices  $B^{(i)}$  et la matrice  $P$  à l'ordre de troncature  $\gamma$ , nous montrons comment calculer la matrice  $P$  à n'importe quel ordre. Pour cela, on calcule  $P$  en résolvant un système linéaire d'équations aux dérivées partielles défini en (3.18) dont  $P$  est l'unique solution  $Q$  vérifiant de plus  $Q \equiv P \pmod{\mathfrak{M}^\gamma}$ .

La démonstration donnée par T. Takano et M. Yoshida [75] est constructive. Nous rappelons leur méthode au paragraphe 3.4. Leur idée est d'appliquer dans un premier temps une suite infinie de transformations tangentes à l'identité pour éliminer tous les termes qui ne sont pas en "résonance" (cf Définitions 3.4.1 et 3.4.4). La transformation de jauge  $Y = PW$  avec  $P \in GL_m(\mathcal{O}_n)$  qui en résulte, conduit à un système

$$dW = \left( \sum_{i=1}^n \frac{C^{(i)}}{x_i} dx_i \right) W$$

qui ne possède que des termes "résonnants" (le système est dit **fortement réduit**). Pour un tel système fortement réduit, T. Takano et M. Yoshida montrent (Théorème 3.4.2) qu'une transformation de jauge de la forme

$$W = \text{diag}(x^{\alpha^{(1)}}, \dots, x^{\alpha^{(m)}})Z$$

conduit à un système de Pfaff de première espèce “constant” (3.2).

Nous montrons au paragraphe 3.4.3 qu’il n’y a pas besoin de connaître tout le développement en série de la transformation  $P$  pour déterminer les matrices  $B^{(i)}$ . Il suffit pour cela de connaître  $P \bmod \mathfrak{M}^{\bar{\gamma}}$  où  $\bar{\gamma}$  est défini en 3.4.3 et ne dépend que du système (3.1).

### 3.1 Rappel du cas ordinaire

Considérons un système différentiel linéaire possédant une singularité de première espèce en  $x = 0$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{A(x)}{x}Y, \quad A(x) = A_0 + A_1x + \cdots \in M_m(\mathbb{C}[[x]]), \quad A_i \in M_m(\mathbb{C}) \quad (3.5)$$

avec  $A_0 \neq 0_m$ .

Nous rappelons ici comment calculer effectivement un système fondamental de solutions d’un système différentiel linéaire (3.5) possédant une singularité de première espèce en  $x = 0$  [4, 79]. On distingue deux cas. Le cas générique où la matrice  $A_0$  possède un bon spectre. Le cas non générique. Dans ce dernier cas, on verra comment se ramener à la situation précédente.

#### 3.1.1 Cas où $A_0$ possède un bon spectre

##### Définition 3.1.1

La matrice  $A_0$  possède un **bon spectre** si ses valeurs propres ne diffèrent pas d’un entier non nul.

On se place ici dans le cas où la matrice  $A_0$  possède un bon spectre. Sous cette hypothèse, on peut construire une matrice  $T(x)$  de la forme

$$T_0 + T_1x + \cdots + T_\nu x^\nu + \cdots \in \text{GL}_m(\mathbb{C}[[x]]), \quad T_0 = \mathbf{I}_m$$

de telle sorte que la transformation de jauge  $Y = T(x)Z$  conduise au système

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{A_0}{x}Z.$$

Cela revient à dire que la matrice  $T(x)$  est solution du système différentiel

$$x \frac{dT}{dx} = AT - TA_0.$$

De manière équivalente, la transformation linéaire cherchée  $T(x) = \mathbf{I}_m + T_1x + \cdots + T_\nu x^\nu + \cdots$  vérifie pour tout  $\nu \geq 0$

$$A_0T_\nu - T_\nu(A_0 + \nu\mathbf{I}_m) = - \sum_{j < \nu} A_{\nu-j}T_j, \quad (3.6)$$

où  $T_0 = \mathbf{I}_m$ .

Mais pour tout  $\nu \geq 1$ , l’application linéaire  $\phi_\nu$ , qui à  $X \in M_m(\mathbb{C})$  associe  $A_0X - X(A_0 + \nu\mathbf{I}_m)$ , est un isomorphisme en vertu du résultat suivant.

**Lemme 3.1.2** ([4, p.212])

L'application  $\phi_{A,B} : M_m(\mathbb{C}) \rightarrow M_m(\mathbb{C})$  est un isomorphisme si et seulement si  $\text{spec}(A) \cap \text{spec}(B) = \emptyset$ .

$$X \mapsto AX - XB$$

Par conséquent il existe une unique solution  $T_\nu$  de l'équation (3.6). Ce qui montre l'existence de la matrice  $T(x)$  cherchée et donne un procédé pour calculer une telle matrice. On obtient alors une matrice fondamentale de solutions du système différentiel ordinaire (3.5) de la forme

$$T(x)x^{A_0}.$$

### 3.1.2 Cas où $A_0$ ne possède pas un bon spectre

Voyons comment se ramener à la situation précédente à l'aide d'une transformation linéaire  $Y = TZ$  **polynomiale**.

Pour cela, on définit une relation d'équivalence sur les valeurs propres de  $A_0$  : deux valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$  sont équivalentes si  $\lambda - \mu \in \mathbb{Z}$ . Soit  $\bar{\lambda}$  une classe d'équivalence de  $\text{spec}(A_0)$  de cardinal supérieur à 1 et  $\lambda \in \bar{\lambda}$  la valeur propre de plus grande partie réelle.

- Tout d'abord, on applique une transformation de jauge  $Y = TZ$  avec  $T$  constante, pour se ramener à la situation où  $A_0$  est diagonale par blocs

$$\begin{bmatrix} A_0^{1,1} & 0 \\ 0 & A_0^{2,2} \end{bmatrix},$$

avec  $\text{spec}(A_0^{1,1}) = \{\lambda\}$  et  $\text{spec}(A_0^{1,1}) \cap \text{spec}(A_0^{2,2}) = \emptyset$ .

- Puis on applique la transformation de cisaillement  $Y = TZ$  définie par

$$T = \begin{bmatrix} x\mathbf{I}_{m_1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{m_2} \end{bmatrix}.$$

Elle conduit à un système différentiel de première espèce  $\frac{dZ}{dx} = \frac{B}{x}Z$  avec

$$B_0 = \begin{bmatrix} A_0^{1,1} - \mathbf{I}_{m_1} & A_0^{1,2} \\ 0 & A_0^{2,2} \end{bmatrix}.$$

On a donc remplacé  $\lambda$  par  $\lambda - 1$ , les autres valeurs propres restant inchangées. En répétant le procédé ci-dessus (diagonalisation par blocs de la matrice de tête suivie d'une transformation de cisaillement) un certain nombre de fois (ce nombre est égal à la différence entre  $\lambda$  et l'élément dans  $\bar{\lambda}$  de plus petite partie réelle), on réduit  $\bar{\lambda}$  à un seul élément. En faisant de même pour chacune des autres classes d'équivalence, on se ramène au cas où le système a un bon spectre. La transformation  $T$  résultant de cette série de transformations est bien polynomiale.

**Remarque 3.1.3**

On peut améliorer le procédé ci-dessus de la façon suivante. Soit  $k$  le nombre de classes d'équivalence pour la relation d'ordre sur  $\text{spec}(A_0)$  définie auparavant. Soient  $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k$  ces classes d'équivalence où  $\lambda_i \in \bar{\lambda}_i$  est le représentant de plus **grande partie réelle**. On note  $d_i$  la plus grande différence positive entre deux valeurs propres de  $\bar{\lambda}_i$  et  $d = \max(d_i)$  :  $d$  est donc la plus grande différence entière positive entre deux éléments de  $\text{spec}(A_0)$ .

- Dans un premier temps, on applique une transformation de jauge  $Y = TZ$  avec  $T$  constante pour se ramener à la situation où  $A_0$  est sous forme diagonale par blocs avec  $k+1$  blocs diagonaux. Les  $k$  premiers blocs correspondent aux espaces caractéristiques associés aux valeurs propres  $\lambda_i, 1 \leq i \leq k$ . On suppose qu'on a ordonné les  $k$  premiers blocs de telle sorte que

- $d_i > 0$  si  $1 \leq i \leq \ell$  ;
- $d_i = 0$  si  $\ell < i \leq k$ .

Le  $(k+1)^{\text{ième}}$  bloc a comme spectre l'ensemble  $\bigcup_{1 \leq i \leq \ell} \bar{\lambda}_i \setminus \{\lambda_i\}$ .

- Dans un second temps, on applique une transformation de cisaillement  $Y = TZ$  où  $T$  est sous la même forme diagonale par blocs que  $A_0$  avec
  - les  $\ell$  premiers blocs de la forme  $x\mathbf{I}_s$  où  $s$  est la taille du bloc correspondant ;
  - les  $k - \ell$  suivants de la forme  $\mathbf{I}_s$  ;
  - le dernier bloc de la forme  $\mathbf{I}_s$ .

On obtient alors un système différentiel de première espèce

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{B(x)}{x} Z,$$

où

$$\text{spec}(B_0) = \{\lambda_i - 1 : 1 \leq i \leq \ell\} \cup (\text{spec}(A_0) \setminus \{\lambda_i : 1 \leq i \leq \ell\}).$$

Il en découle que la plus grande différence entière positive entre deux éléments de  $\text{spec}(B_0)$  est donc égale à  $d - 1$  si  $d > 0$ . On passe donc de  $d$  à  $d - 1$ . Par ailleurs,  $B_0$  est obtenu à partir de  $A_0$  et  $A_1$ .

On poursuit le procédé ci-dessus (diagonalisation par blocs de la matrice de tête suivi d'une transformation de cisaillement) jusqu'à ce que " $d$ " soit nul. Le système différentiel de première espèce obtenu à la fin est équivalent au système (3.5) et possède un bon spectre. De plus, la matrice de tête du système obtenu ne dépend que des  $d + 1$  premiers termes du développement en série de  $A(x)$ . Par conséquent le calcul de la matrice de monodromie (c'est-à-dire la matrice du système différentiel de première espèce "constant" équivalent à (3.5)) ne dépend que des  $d + 1$  premiers termes de la matrice  $A(x)$ . C'est une borne optimale sur le nombre de termes de  $A(x)$  pour déterminer la matrice de monodromie.

## 3.2 Systèmes ayant un bon spectre

Le Théorème 3.2.1 est énoncé et démontré dans [33, Théorème 3.4 (i)]. Mais la démonstration donnée dans [33] n'est pas constructive. Nous en donnons une démonstration constructive adaptée du procédé rappelé au paragraphe 3.1.1. Notre démonstration conduit à une méthode de calcul de la matrice  $T$ .

### Théorème 3.2.1

Soit un système de Pfaff de première espèce

$$dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Y, \quad A^{(i)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} A_{\alpha}^{(i)} x^{\alpha} \in M_m(\mathcal{O}_n).$$

On suppose que pour chaque  $1 \leq i \leq n$ , la matrice  $A_{(0)^n}^{(i)}$  a un bon spectre. Dans ces conditions, il existe une unique matrice  $T \in GL_m(\mathcal{O}_n)$  avec  $T_{(0)^n} = \mathbf{I}_m$  telle que la transformation de jauge  $Y = TZ$  donne le système de Pfaff de première espèce

$$dZ = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A_{(0)^n}^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Z.$$

On dit qu'un système de Pfaff de première espèce

$$dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Y$$

a un **bon spectre**, si chaque matrice  $A_{(0)^n}^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , a un bon spectre.

Pour montrer le Théorème 3.2.1, il suffit de montrer que le système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} x_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} = A^{(1)}T - TA_{(0, \dots, 0)}^{(1)} \\ \vdots \\ x_n \frac{\partial T}{\partial x_n} = A^{(n)}T - TA_{(0, \dots, 0)}^{(n)} \end{cases} \quad (3.7)$$

admet une unique solution  $T$  vérifiant  $T_{(0)^n} = \mathbf{I}_m$ .

Le résultat découle alors du théorème suivant.

### Théorème 3.2.2

Considérons un système de Pfaff de première espèce

$$dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Y \quad (3.8)$$

où  $A^{(i)} \in M_m(\mathcal{O}_n)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Le système suivant est alors complètement intégrable.

$$\begin{cases} x_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} = A^{(1)}T - TA_{(0)^n}^{(1)} \\ \vdots \\ x_n \frac{\partial T}{\partial x_n} = A^{(n)}T - TA_{(0)^n}^{(n)} \end{cases} \quad (3.9)$$

On note  $E \subseteq M_m(\mathcal{O}_n)$  le  $\mathbb{C}$ -espace des solutions du système (3.9) et  $\bar{E} \subseteq M_m(\mathbb{C})$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des matrices  $X$  solutions du système

$$\begin{cases} 0 &= A_{(0)^n}^{(1)} X - X A_{(0)^n}^{(1)} \\ &\vdots \\ 0 &= A_{(0)^n}^{(n)} X - X A_{(0)^n}^{(n)} \end{cases} \quad (3.10)$$

On définit une application  $\mathbb{C}$ -linéaire  $\phi$  de  $E$  dans  $\bar{E}$  par  $\phi(T) = T_{(0)^n}$ . Si le système (3.8) a un bon spectre, alors l'application  $\phi$  est un isomorphisme. En particulier, il existe une et une seule matrice  $T \in E$  avec  $T_{(0)^n} = \mathbf{I}_m$ .

**Démonstration.** Pour montrer que le système (3.9) est complètement intégrable, on introduit les opérateurs  $\nabla_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  définis par

$$\nabla_i(T) = x_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - A^{(i)} T + T A_{(0)^n}^{(i)}.$$

Un calcul direct montre que la complète intégrabilité du système (3.8) implique que les  $\nabla_i$  commutent deux à deux.

On vérifie aisément que l'application  $\phi$  qui à  $T \in E$  associe  $T_{(0)^n}$  définit bien un élément de  $\bar{E}$ .

Pour montrer que  $\phi$  est un isomorphisme dès que le système (3.8) a un bon spectre, on procède par récurrence sur le nombre de variables indépendantes  $n$ .

Le cas  $n = 1$  a été rappelé au paragraphe 3.1.1. Supposons le résultat vrai pour tous les systèmes de Pfaff de première espèce ayant un bon spectre

$$dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Y \text{ avec } n \geq 1 \text{ fixé.}$$

Considérons alors un système de Pfaff de première espèce ayant un bon spectre

$$dY = \left( \sum_{i=1}^{n+1} \frac{B^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Y. \quad (3.11)$$

On note  $F \subseteq M_m(\mathcal{O}_{n+1})$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des solutions du système complètement intégrable

$$\begin{cases} x_1 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_1} &= B^{(1)} \tilde{T} - \tilde{T} B_{(0)^{n+1}}^{(1)} \\ &\vdots \\ x_{n+1} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_{n+1}} &= B^{(n+1)} \tilde{T} - \tilde{T} B_{(0)^{n+1}}^{(n+1)} \end{cases} \quad (3.12)$$

et  $\bar{F} \subseteq M_m(\mathbb{C})$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des matrices solutions du système linéaire

$$\begin{cases} 0 &= B_{(0)^{n+1}}^{(1)} X - X B_{(0)^{n+1}}^{(1)} \\ &\vdots \\ 0 &= B_{(0)^{n+1}}^{(n+1)} X - X B_{(0)^{n+1}}^{(n+1)} \end{cases} \quad (3.13)$$

Il s'agit de montrer que  $\Psi : F \rightarrow \bar{F}$  qui à  $\tilde{T}$  associe  $\tilde{T}_{(0)^{n+1}}$  est un isomorphisme. Pour cela, considérons le système de Pfaff

$$dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Y, \quad (3.14)$$

où l'on a posé  $A^{(i)} = B^{(i)} \pmod{x_{n+1}}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Puisque le système (3.11) est complètement intégrable, le système (3.14) l'est également. En effet si  $\tilde{\Delta}_{i,1}$  désigne l'opérateur défini par

$$\tilde{\Delta}_{i,1}(Y) = x_i \frac{\partial Y}{\partial x_i} - B^{(i)}Y, \text{ pour } 1 \leq i \leq n+1,$$

alors l'opérateur  $\Delta_{i,1}$  défini par

$$\Delta_{i,1}(Y) = x_i \frac{\partial Y}{\partial x_i} - A^{(i)}Y, \text{ pour } 1 \leq i \leq n,$$

vérifie  $\Delta_{i,1} = \tilde{\Delta}_{i,1} \pmod{x_{n+1}}$  pour  $1 \leq i \leq n$ . De plus, on a

$$A_{(0)^n}^{(i)} = B_{(0)^{n+1}}^{(i)}, \text{ pour } 1 \leq i \leq n,$$

donc le système (3.14) est un système de Pfaff de première espèce ayant un bon spectre. Par ailleurs, si  $\tilde{\nabla}_i$  désigne l'opérateur défini par

$$\tilde{\nabla}_i(\tilde{T}) = x_i \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} - \tilde{T}B^{(i)} + \tilde{T}B_{(0)^{n+1}}^{(i)}, \text{ pour } 1 \leq i \leq n+1,$$

on a  $\nabla_i = \tilde{\nabla}_i \pmod{x_{n+1}}$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

Soit  $\tilde{T} \in F$ . En réduisant (3.12) modulo  $x_{n+1}$ , on trouve que  $T = \tilde{T} \pmod{x_{n+1}}$  vérifie :

$$\begin{cases} x_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} = A^{(1)}T - TA_{(0)^n}^{(1)} \\ \vdots \\ x_n \frac{\partial T}{\partial x_n} = A^{(n)}T - TA_{(0)^n}^{(n)} \\ 0 = A^{(n+1)}T - TB_{(0)^{n+1}}^{(n+1)} \end{cases}$$

où  $A^{(n+1)} = B^{(n+1)} \pmod{x_{n+1}}$ . De plus  $T_{(0)^n} = \tilde{T}_{(0)^{n+1}}$  est solution du système linéaire

$$\begin{cases} 0 = A_{(0)^n}^{(1)}\tilde{T}_{(0)^{n+1}} - \tilde{T}_{(0)^{n+1}}A_{(0)^n}^{(1)} \\ \vdots \\ 0 = A_{(0)^n}^{(n)}\tilde{T}_{(0)^{n+1}} - \tilde{T}_{(0)^{n+1}}A_{(0)^n}^{(n)} \\ 0 = B_{(0)^{n+1}}^{(n+1)}\tilde{T}_{(0)^{n+1}} - \tilde{T}_{(0)^{n+1}}B_{(0)^{n+1}}^{(n+1)} \end{cases}$$

En particulier,  $T \in E$  et  $\tilde{T}_{(0)^{n+1}} \in \bar{E}$ .

Soit  $X \in \bar{F}$ , nous allons construire  $\tilde{T} \in F$  vérifiant  $\Psi(\tilde{T}) = X$ . D'après ce qui précède,  $\bar{F} \subseteq \bar{E}$ . D'après l'hypothèse de récurrence, il existe donc une unique matrice  $T \in E$  vérifiant  $\phi(T) = X$ . Par définition,  $T$  est solution de (3.9). La matrice  $T$  vérifie également

$$0 = A^{(n+1)}T - TB_{(0)^{n+1}}^{(n+1)}.$$

En effet,  $(\tilde{\nabla}_{n+1} \bmod x_{n+1})(T) = A^{(n+1)}T - TB_{(0)^{n+1}}^{(n+1)}$ . Or  $\tilde{\nabla}_{n+1} \bmod x_{n+1}$  commute avec  $\nabla_i$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Par conséquent,  $(\tilde{\nabla}_{n+1} \bmod x_{n+1})(T)$  est une solution du système (3.9) et donc appartient à  $E$ . Or

$$\phi((\tilde{\nabla}_{n+1} \bmod x_{n+1})(T)) = -B_{(0)^{n+1}}^{(n+1)}X + XB_{(0)^{n+1}}^{(n+1)} = 0,$$

puisque  $X \in \bar{F}$ . L'application  $\phi$  étant un isomorphisme, on en déduit que

$$(\tilde{\nabla}_{n+1} \bmod x_{n+1})(T) = 0, \text{ c'est-à-dire } 0 = A^{(n+1)}T - TB_{(0)^{n+1}}^{(n+1)}. \quad (3.15)$$

Montrons qu'il existe un unique  $\tilde{T} = \sum_{k \geq 0} \tilde{T}_k x_{n+1}^k \in M_m(\mathcal{O}_{n+1})$  où pour tout  $k \geq 0$ ,  $\tilde{T}_k \in M_m(\mathcal{O}_n)$ , vérifiant  $\tilde{T}_0 = T$  et  $\tilde{\nabla}_{n+1}(\tilde{T}) = 0$ , c'est-à-dire

$$\begin{cases} x_{n+1} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_{n+1}} = B^{(n+1)}\tilde{T} - \tilde{T}B_{(0)^{n+1}}^{(n+1)} \\ \tilde{T}_0 = T \end{cases} \quad (3.16)$$

Plus généralement, si l'on se donne  $T$  vérifiant l'équation (3.15), il existe un unique  $\tilde{T} \in M_m(\mathcal{O}_{n+1})$  solution de (3.16).

En effet, en identifiant les puissances en  $x_{n+1}^\ell$  dans le système différentiel précédent, on trouve pour tout  $\ell \geq 0$

$$\ell \tilde{T}_\ell = \sum_{0 \leq j \leq \ell} B_{\ell-j}^{(n+1)} \tilde{T}_j - \tilde{T}_\ell B_{(0)^{n+1}}^{(n+1)}.$$

Pour  $\ell = 0$ , on retrouve l'égalité (3.15). Soient alors  $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$  avec  $\alpha_{n+1} \neq 0$  et  $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ . En regardant le terme en  $x^{\alpha'}$  dans l'équation ci-dessus pour  $\ell = \alpha_{n+1}$ , on obtient l'égalité suivante :

$$\alpha_{n+1} \tilde{T}_\alpha = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{n+1}, \beta \preceq \alpha} B_{\alpha-\beta}^{(n+1)} \tilde{T}_\beta - \tilde{T}_\alpha B_{(0)^{n+1}}^{(n+1)}.$$

En regroupant les termes où apparaît  $\tilde{T}_\alpha$ , on trouve

$$\left( B_{(0)^{n+1}}^{(1)} - \alpha_{n+1} \mathbf{I}_m \right) \tilde{T}_\alpha - \tilde{T}_\alpha B_{(0)^{n+1}}^{(n+1)} = - \sum_{\beta \prec \alpha} B_{\alpha-\beta}^{(n+1)} \tilde{T}_\beta.$$

Il résulte du Lemme 3.1.2 que  $\tilde{T}_\alpha$  est entièrement déterminé par la donnée des  $\tilde{T}_\beta$  avec  $\beta \prec \alpha$ . Les coefficients  $\tilde{T}_\alpha$  avec  $\alpha_{n+1} = 0$  étant donnés (ils sont



égaux à  $T_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$ ) et en ordonnant les  $\alpha$  selon l'ordre lexicographique (défini par  $x_1 < \dots < x_{n+1}$ ), on en déduit par un raisonnement par récurrence l'existence et l'unicité d'un tel  $\tilde{T}$ .

Il reste à voir que  $\tilde{T}$  vérifie  $\tilde{\nabla}_i(\tilde{T}) = 0$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Or comme  $\tilde{\nabla}_{n+1}$  et  $\tilde{\nabla}_i$  commutent,  $\tilde{\nabla}_{n+1}(\tilde{\nabla}_i(\tilde{T})) = 0$ . Autrement dit,  $S^{(i)} = \tilde{\nabla}_i(\tilde{T})$  pour  $1 \leq i \leq n$ , est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial S^{(i)}}{\partial x_{n+1}} = B^{(n+1)} S^{(i)} - S^{(i)} B_{(0)^{n+1}}^{(n+1)}.$$

Par ailleurs  $S^{(i)} \bmod x_{n+1} = \nabla_i(\tilde{T} \bmod x_{n+1}) = \nabla_i(T) = 0$ . Le raisonnement montrant l'existence et l'unicité de  $\tilde{T}$  solution de (3.16) s'applique dans le cas présent. Par conséquent,  $S_0^{(i)}$  étant égal à 0, et puisque 0 est une solution évidente de l'équation différentielle, on en déduit que  $S^{(i)} = 0$ .

Cela montre l'existence d'un  $\tilde{T} \in F$  vérifiant  $\tilde{T}_{(0)^{n+1}} = X$ . Il reste à montrer l'unicité. Soit  $\tilde{S} \in F$  vérifiant également  $\tilde{S}_{(0)^{n+1}} = X$ . La matrice  $S = \tilde{S} \bmod x_{n+1}$  appartient à  $E$  et  $\phi(S) = X$ . D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que  $T = S$ . Il en résulte que  $\tilde{S}$  est également solution du système différentiel avec condition initiale (3.16). D'où l'égalité entre  $\tilde{S}$  et  $\tilde{T}$ . Cela montre que  $\Psi$  est un isomorphisme.

□

La démonstration ci-dessus conduit à une méthode de calcul de la transformation de jauge  $T$  recherchée. On procède comme suit.

- On résout la première équation modulo  $x_2, \dots, x_n$  : on obtient alors  $T(x_1, 0, \dots, 0)$ .
- On résout ensuite la deuxième équation modulo  $x_3, \dots, x_n$  : on obtient alors  $T(x_1, x_2, 0, \dots, 0)$ .
- Et ainsi de suite ...

On peut également s'inspirer de ce que nous avons fait dans la première partie de cette thèse. Nous choisissons alors un ordre monomial et injectons  $T = \sum T_\alpha x^\alpha$  dans le système d'équations aux dérivées partielles (3.7) pour obtenir des relations de récurrence sur les coefficients  $T_\alpha$ . On calcule alors les coefficients  $T_\alpha$  par récurrence sur l'ordre monomial.

### Remarque 3.2.3

Dans la démonstration précédente, on aurait pu remplacer l'ordre lexicographique par n'importe quel ordre total  $\leq$  sur  $\mathbb{N}^{m+1}$  qui vérifie :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{m+1}, \alpha \preceq \beta \Rightarrow \alpha \leq \beta.$$

Cette condition entraîne que  $\leq$  est un bon ordre en vertu du lemme de Dickson.

En revanche, nous n'avons pas su adapter le procédé décrit au paragraphe 3.1.2. Le principal obstacle est l'introduction éventuelle de  $x_1$  au dénominateur des autres systèmes si l'on cherche à se ramener à la situation où le sous-système en  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  a un bon spectre (c'est-à-dire  $A_{(0)^n}^{(1)}$  a un bon spectre.)

### 3.3 Approche de Gérard et Levelt

L'approche de Gérard et Levelt utilise la notion d'opérateur différentiel sur un  $K$ -espace vectoriel  $V$  de dimension  $m$ . Dans notre cas  $V$  sera égal à  $K_n^m$ . Rappelons qu'une application  $\delta : K \rightarrow K$  est une  **$\mathbb{C}$ -dérivation** si c'est une application  $\mathbb{C}$ -linéaire qui vérifie la règle de Leibniz, c'est-à-dire pour tous  $f, g \in K$

$$\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g).$$

La  $\mathbb{C}$ -linéarité entraîne que  $\mathbb{C}$  est contenu dans le corps des constantes de  $\delta$ , c'est-à-dire  $\delta(\mathbb{C}) = \{0\}$ .

#### Définition 3.3.1

Soit  $\delta$  une  $\mathbb{C}$ -dérivation de  $K$ . Une application  $\Delta : V \rightarrow V$  est un  **$\delta$ -opérateur différentiel** de  $V$  si

(i)  $\Delta$  est additive : Pour tous  $v, w \in V$ ,

$$\Delta(v + w) = \Delta(v) + \Delta(w);$$

(ii) pour tout  $f \in K$  et tout  $v \in V$  on a

$$\Delta(fv) = \delta(f)v + f\Delta(v).$$

Remarquons qu'un  $\delta$ -opérateur différentiel est nécessairement  $\mathbb{C}$ -linéaire, puisque  $\delta(f) = 0$  si  $f \in \mathbb{C}$ . Les opérateurs  $\Delta_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{A^{(i)}}{x_i}$ , définis de  $K_n^m$  dans  $K_n^m$ , associés à un système de Pfaff de première espèce  $dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Y$  sont des  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ -opérateurs différentiels. Rappelons que l'hypothèse de complète intégrabilité du système de Pfaff signifie que les opérateurs différentiels  $\Delta_i$  commutent deux à deux.

Les opérateurs qui importent dans la suite sont les  $x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ -opérateurs différentiels  $x_i \Delta_i$  que l'on notera  $\Delta_{i,1}$  et qui, bien entendu, commutent deux à deux. Le fait que le système de Pfaff complètement intégrable considéré est un système de Pfaff de première espèce revient à dire que pour  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\Delta_{i,1}(\mathcal{O}_n^m) \subseteq \mathcal{O}_n^m.$$

L'idée de R. Gérard et A.H.M. Levelt est d'appliquer une décomposition de Dunford "généralisée" aux opérateurs  $\Delta_{i,1}$  en restriction à  $\mathcal{O}_n^m$  muni de sa filtration  $\mathfrak{M}$ -adique, où  $\mathfrak{M}$  désigne l'idéal  $(x_1, \dots, x_n)$ . D'une façon générale, cette décomposition de Dunford est employée pour n'importe quel réseau  $\Lambda$  du  $K_n$ -espace vectoriel  $V$  vérifiant

$$\Delta_{i,1}(\Lambda) \subseteq \Lambda, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Chaque opérateur  $\Delta_{i,1}$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$\Delta_{i,1} = {}^s\Delta_{i,1} + {}^n\Delta_{i,1}$$

où  ${}^s\Delta_{i,1}$  et  ${}^n\Delta_{i,1}$  sont  $\mathbb{C}$ -linéaires, commutent et en un sens que l'on précisera bientôt,  ${}^s\Delta_{i,1}$  est *semi-simple* et  ${}^n\Delta_{i,1}$  est *topologiquement nilpotent*.

Comme en dimension finie,  $\{{}^s\Delta_{i,1}, {}^n\Delta_{i,1}, i = 1, \dots, n\}$  est un ensemble d'endomorphismes qui commutent deux à deux. De plus  ${}^s\Delta_{i,1}$  se prolonge de façon naturelle à  $V$  et définit alors un  $x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ -opérateur différentiel. De même  ${}^n\Delta_{i,1}$  se prolonge à  $V$  et définit alors une application  $K_n$ -linéaire.

### Définition 3.3.2

Un sous-ensemble  $\Lambda$  d'un  $K_n$ -espace vectoriel  $V$  de dimension  $m$  est un  $\mathcal{O}_n$ -**réseau** (on dira plus simplement réseau s'il n'y a pas d'ambiguïté) si c'est un  $\mathcal{O}_n$ -module de type fini qui engendre  $V$  comme  $K_n$ -espace vectoriel.

Remarquons que si un réseau de  $V$  est libre, c'est-à-dire qu'il possède une base en tant que  $\mathcal{O}_n$ -module, il est nécessairement de rang  $m$ .

On munit le réseau  $\Lambda$  de sa filtration  $\mathfrak{M}$ -adique, où  $\mathfrak{M} = (x_1, \dots, x_n)$  est l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_n$ . La filtration associée est donc la suite  $(F^i\Lambda)_{i \geq 0}$  où l'on a posé  $F^i\Lambda = \mathfrak{M}^i\Lambda$  pour  $i \geq 0$ .

Le réseau  $\Lambda$  est alors un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel filtré qui vérifie :

- (i) pour tout  $i \geq 0$ ,  $\Lambda/F^i\Lambda$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie ;
- (ii)  $\bigcap_{i \geq 1} F^i\Lambda = \{0\}$  ;
- (iii)  $\Lambda \simeq \hat{\Lambda} = \varprojlim \Lambda/F^i\Lambda$ .

La deuxième propriété résulte du théorème de Krull [2, p. 110]. Elle signifie que  $\Lambda$  muni de la topologie définie par la filtration est un espace topologique séparé. La dernière propriété signifie que  $\Lambda$  est complet pour la topologie  $\mathfrak{M}$ -adique : un développement  $\mathfrak{M}$ -adique définit un unique élément de  $\Lambda$ .

R. Gérard et A.H.M. Levelt [33] ont généralisé la décomposition de Dunford aux endomorphismes de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels filtrés qui vérifient (i), (ii) et (iii).

### Définition 3.3.3

Un **endomorphisme**  $\phi$  de  $\Lambda$  muni de la filtration  $\mathfrak{M}$ -adique est une application  $\mathbb{C}$ -linéaire qui préserve la filtration. Autrement dit pour tout  $i \geq 0$ ,

$$\phi(\mathfrak{M}^i\Lambda) \subseteq \mathfrak{M}^i\Lambda.$$

Par exemple si  $dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Y$  est un système de Pfaff de première espèce, les opérateurs  $\Delta_{i,1}$  sont des endomorphismes de  $\mathcal{O}_n^m$ . Remarquons qu'un système de Pfaff complètement intégrable  $dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i^{p_i+1}} dx_i \right) Y$  est régulier<sup>1</sup> si et seulement s'il existe un **réseau libre**  $\Lambda$  tel que  $\Delta_{i,1}(\Lambda) \subseteq \Lambda$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

<sup>1</sup>C'est une traduction de la définition de régularité en terme de réseau libre invariant.

R. Gérard et A.H.M. Levelt ont montré grâce à la décomposition de Dunford que le système de Pfaff complètement intégrable  $dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i^{p_i+1}} dx_i \right) Y$  est régulier si et seulement s'il existe un réseau  $\Lambda$  invariant par les opérateurs  $\Delta_{i,1}$  : le réseau  $\Lambda$  n'a donc pas besoin d'être libre.

### 3.3.1 Décomposition de Dunford Généralisée

Dans la suite,  $E$  désigne un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel muni d'une filtration  $(F^i E)_{i \geq 0}$  décroissante.  $(F^i E)_{i \geq 0}$  est donc une suite décroissante de sous-espaces vectoriels de  $E$ . On suppose que  $E$  vérifie :

- (i) pour tout  $i \geq 0$ ,  $\dim_{\mathbb{C}}(E/F^i E) < +\infty$  ;
- (ii)  $\bigcap_{i \geq 1} F^i E = \{0\}$  ;
- (iii)  $E \simeq \hat{E} = \varprojlim E/F^i E$ .

Comme nous l'avons dit précédemment, la deuxième condition signifie que  $E$  est un espace séparé pour la topologie définie par la filtration. La dernière, que  $E$  est complet ( $\simeq$  signifie que le morphisme canonique est un isomorphisme). Nous renvoyons à [47] pour plus de détails sur les espaces filtrés.

On note  $\text{End}(E)$  l'ensemble des applications  $\mathbb{C}$ -linéaires de  $E$  dans  $E$  qui respectent la filtration, c'est-à-dire l'ensemble des applications  $\mathbb{C}$ -linéaires  $f$  qui vérifient  $f(F^i E) \subseteq F^i E$  pour tout  $i \geq 0$ .

Soient  $\pi_i : E \rightarrow E/F^i E$  et  $\theta_i : E/F^i E \rightarrow E/F^{i-1} E$  les morphismes canoniques. Un endomorphisme  $f \in \text{End}(E)$  induit un morphisme  $f_i : E/F^i E \rightarrow E/F^i E$ . On a alors pour tout  $i \geq 2$

$$\theta_i \circ f_i = f_{i-1} \circ \theta_i.$$

Réciproquement la donnée de morphismes  $f_i : E/F^i E \rightarrow E/F^i E$  pour tout  $i \geq 1$ , vérifiant  $\theta_i \circ f_i = f_{i-1} \circ \theta_i$  pour tout  $i \geq 2$ , définit un élément de  $\text{End}(E)$  que l'on note  $\varprojlim f_i$ .

Soit  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Pour  $i \geq 1$ , on note  $G_i$  le sous-espace vectoriel  $\pi_i(G) \subseteq E/F^i E$ . L'adhérence de  $G$  dans  $E$  pour la topologie définie par la filtration est égale à  $\varprojlim G_i = \{x \in E : \forall i \geq 1, \pi_i(x) \in G_i\}$ . Par conséquent  $G$  est fermé si et seulement s'il est égal à  $\varprojlim G_i$ .

#### Définition 3.3.4 ([33, Définition 1.2])

L'application  $f \in \text{End}(E)$  est **semi-simple** si tout sous-espace vectoriel fermé  $F$  stable par  $f$  admet un supplémentaire fermé stable par  $f$ .

#### Proposition 3.3.5 ([33, Proposition 1.3])

L'application  $f \in \text{End}(E)$  est semi-simple si et seulement si  $f_i$  est semi-simple pour tout  $i \geq 1$ .

**Démonstration.** Supposons  $f$  semi-simple. Soit  $F_i$  un sous-espace vectoriel stable par  $f_i$  avec  $i \geq 1$ . Le sous-espace vectoriel  $F = \pi_i^{-1}(F_i)$  est stable par  $f$ . Il possède donc un supplémentaire fermé stable par  $f$ , que l'on note  $G$ . Comme on a  $\ker(\pi_i) \subseteq F$ , le sous espace vectoriel  $G_i = \pi_i(G)$  est un supplémentaire de  $F_i$  et par construction,  $G_i$  est stable par  $f_i$ .

Réciproquement supposons  $f_i$  semi-simple pour tout  $i \geq 1$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel fermé stable par  $f$ . Il suffit de construire par récurrence sur  $i \geq 1$  une famille  $(G_i)$ , où  $G_i$  est un supplémentaire de  $F_i$  dans  $E/F^i E$  stable par  $f_i$  et qui vérifie  $\theta_i(G_i) = G_{i-1}$  pour tout  $i \geq 2$ , grâce à l'identification canonique entre  $E$  et  $\varprojlim E/F^i E$ .

Pour  $i = 1$ , il suffit de prendre pour  $G_1$  n'importe quel supplémentaire de  $F_1$  stable par  $f_1$ . Supposons avoir construits  $G_1, \dots, G_i$ ,  $i \geq 1$  avec les propriétés requises. Le sous-espace vectoriel  $\theta_{i+1}^{-1}(G_i)$  de  $E/F^{i+1} E$  est stable par  $f_{i+1}$ . En effet, on déduit immédiatement de l'égalité  $\theta_{i+1} \circ f_{i+1} = f_i \circ \theta_{i+1}$ , que si  $x \in \theta_{i+1}^{-1}(G_i)$  alors  $f_{i+1}(x) \in \theta_{i+1}^{-1}(G_i)$ .

Considérons  $\tilde{f}_{i+1}$  la restriction à  $\theta_{i+1}^{-1}(G_i)$  de  $f_{i+1}$ . L'application linéaire  $\tilde{f}_{i+1}$  est semi-simple et  $H = \theta_{i+1}^{-1}(G_i) \cap F_{i+1}$  est un sous-espace stable de  $\tilde{f}_{i+1}$  (en fait  $H = \ker(\theta_{i+1})$ ). Notons  $G_{i+1}$  un supplémentaire de  $H$  dans  $\theta_{i+1}^{-1}(G_i)$  stable par  $\tilde{f}_{i+1}$ . Le sous-espace vectoriel  $G_{i+1}$  de  $E/F^{i+1} E$  possède alors toutes les propriétés requises.

□

**Définition 3.3.6** ([33, Définition 1.4])

Soit  $f \in \text{End}(E)$ . L'endomorphisme  $f$  est **topologiquement nilpotent** si pour tout  $x \in E$ , la suite des itérés  $(f^n(x))$  converge vers 0.

Si  $f$  est topologiquement nilpotent, la convergence de la suite d'endomorphismes  $(f^n)$  vers 0 est uniforme. Plus précisément :

**Proposition 3.3.7**

Soit  $f \in \text{End}(E)$ . Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est topologiquement nilpotent ;
- (ii) pour tout  $i \geq 1$ ,  $f_i$  est nilpotent ;
- (iii) pour tout  $i \geq 1$ , il existe  $n_i \in \mathbb{N}$  tel que  $f^{n_i}(E) \subseteq F^i E$ .

**Théorème 3.3.8** (Décomposition de Dunford [33, Théorème 1.5])

Soit  $f \in \text{End}(E)$ . Il existe un unique couple  $(s, n) \in \text{End}(E) \times \text{End}(E)$  vérifiant

- (i)  $s$  semi-simple et  $n$  topologiquement nilpotent ;
- (ii)  $f = s + n$  et  $s \circ n = n \circ s$ .

**Démonstration.** Pour tout  $i \geq 1$ , il existe un unique couple  $(s_i, n_i)$  d'endomorphismes de  $E/F^i E$  avec  $s_i$  semi-simple et  $n_i$  nilpotent tel que  $f_i = s_i + n_i$  et  $s_i \circ n_i = n_i \circ s_i$ , d'après la décomposition de Dunford en dimension finie. Il suffit de montrer que pour tout  $i \geq 1$ ,

$$\theta_{i+1} \circ s_{i+1} = s_i \circ \theta_{i+1} \text{ et } \theta_{i+1} \circ n_{i+1} = n_i \circ \theta_{i+1}.$$

En posant  $s = \varprojlim s_i$  et  $n = \varprojlim n_i$ , on a les propriétés souhaitées.

Pour achever l'existence, il reste donc à montrer les égalités

$$\theta_{i+1} \circ s_{i+1} = s_i \circ \theta_{i+1} \text{ et } \theta_{i+1} \circ n_{i+1} = n_i \circ \theta_{i+1}.$$

On a  $f_{i+1}(F^i E/F^{i+1} E) \subseteq F^i E/F^{i+1} E$ . Or  $s_{i+1}$  et  $n_{i+1}$  sont des polynômes en  $f_{i+1}$ . Par conséquent  $F^i E/F^{i+1} E$  est stable par  $s_{i+1}$  et  $n_{i+1}$ .

Il existe donc  $\tilde{s}_i : E/F^i E \rightarrow E/F^i E$  et  $\tilde{n}_i : E/F^i E \rightarrow E/F^i E$  uniques tels que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{array}{ccc} E/F^{i+1} E & \xrightarrow{s_{i+1}} & E/F^{i+1} E \\ \theta_{i+1} \downarrow & & \downarrow \theta_{i+1} \\ E/F^i E & \xrightarrow{\tilde{s}_i} & E/F^i E \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E/F^{i+1} E & \xrightarrow{n_{i+1}} & E/F^{i+1} E \\ \theta_{i+1} \downarrow & & \downarrow \theta_{i+1} \\ E/F^i E & \xrightarrow{\tilde{n}_i} & E/F^i E \end{array}$$

Grâce à la propriété universelle du quotient, on en déduit que

$$f_i = \tilde{s}_i + \tilde{n}_i \text{ et } \tilde{s}_i \circ \tilde{n}_i = \tilde{n}_i \circ \tilde{s}_i.$$

De plus, il n'est pas difficile à voir que  $\tilde{s}_i$  (resp.  $\tilde{n}_i$ ) est semi-simple (resp. nilpotent). Par unicité de la décomposition de Dunford en dimension finie, on a  $\tilde{s}_i = s_i$  et  $\tilde{n}_i = n_i$ . D'où les égalités  $\theta_{i+1} \circ s_{i+1} = s_i \circ \theta_{i+1}$  et  $\theta_{i+1} \circ n_{i+1} = n_i \circ \theta_{i+1}$ .

L'unicité provient de l'unicité de la décomposition en dimension finie.

□

Deux résultats classiques en dimension finie se généralisent aisément dans le cadre des espaces vectoriels filtrés complets.

**Théorème 3.3.9 ([33])**

Soit  $\{f^{(1)}, \dots, f^{(\ell)}\} \subseteq \text{End}(E)$  une famille d'endomorphismes commutant deux à deux. Soit  $f^{(k)} = s^{(k)} + n^{(k)}$  la décomposition de Dunford de  $f^{(k)}$  pour  $1 \leq k \leq \ell$ . Alors  $\{s^{(k)}, n^{(k)}, 1 \leq k \leq \ell\}$  est une famille d'endomorphismes qui commutent deux à deux.

**Théorème 3.3.10 ([33])**

Soit  $\{f^{(1)}, \dots, f^{(\ell)}\} \subseteq \text{End}(E)$  une famille d'endomorphismes semi-simples commutant deux à deux. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel fermé de  $E$  stable par les  $f^{(k)}$ ,  $1 \leq k \leq \ell$ . Il existe alors un supplémentaire fermé de  $F$  stable par les  $f^{(k)}$ ,  $1 \leq k \leq \ell$ .

**Démonstration.** Puisque  $F$  s'identifie avec  $\varprojlim F_i$  ( $F_i = \pi_i(F)$ ), il suffit de construire une famille  $(G_i)_{i \geq 1}$  vérifiant :

- $G_i$  est un supplémentaire de  $F_i$  stable par les  $f_i^{(k)}$ ,  $1 \leq k \leq \ell$ ;
- pour tout  $i \geq 2$ ,  $\theta_i(G_i) = G_{i-1}$ .

$G = \varprojlim G_i$  a alors les propriétés requises. Pour construire cette famille, on reprend mot pour mot la démonstration de la proposition 3.3.5, exception faite que le sous-espace à choisir est stable par une famille d'endomorphismes diagonalisables : ce qui est un résultat classique.

□

### 3.3.2 Application aux systèmes de Pfaff de première espèce

On se place ici dans la situation où le système de Pfaff complètement intégrable  $dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i^{p_i+1}} dx_i \right) Y$  n'est pas nécessairement un système de Pfaff de première espèce. En revanche, on suppose l'existence d'un réseau  $\Lambda \subseteq K_n^m$  qui vérifie

$$\Delta_{i,1}(\Lambda) \subseteq \Lambda \text{ pour } 1 \leq i \leq n.$$

En utilisant la règle de Leibniz, on voit immédiatement que les opérateurs différentiels  $\Delta_{i,1}$  respectent la filtration  $\mathfrak{M}$ -adique. On peut donc écrire chaque opérateur  $\Delta_{i,1}$  de manière unique sous la forme

$$\Delta_{i,1} = {}^s\Delta_{i,1} + {}^n\Delta_{i,1}$$

où  ${}^s\Delta_{i,1}$  est semi-simple,  ${}^n\Delta_{i,1}$  est topologiquement nilpotent et  ${}^s\Delta_{i,1}$  et  ${}^n\Delta_{i,1}$  commutent.

**Proposition 3.3.11 ([33, prop. 3.2])**

*Les endomorphismes  ${}^s\Delta_{i,1}$  s'étendent à l'espace vectoriel  $K_n^m$  et définissent des  $x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ -opérateurs différentiels. De même les endomorphismes  ${}^n\Delta_{i,1}$  s'étendent à  $K_n^m$  et définissent des applications  $K_n$ -linéaires de  $K_n^m$ .*

Puisque le sous-module fermé  $\mathfrak{M}\Lambda$  est stable par chacun des opérateurs  ${}^s\Delta_{i,1}$ , il existe un supplémentaire fermé  $W$  de  $\mathfrak{M}\Lambda$  dans  $\Lambda$  stable par chacun des opérateurs  ${}^s\Delta_{i,1}$  en vertu du théorème 3.3.10. Le sous-espace vectoriel  $W$  est de dimension finie égale à  $\dim_{\mathbb{C}}(\Lambda/\mathfrak{M}\Lambda)$ . On note  $r$  la dimension du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\bar{\Lambda} = \Lambda/\mathfrak{M}\Lambda$ . Soit  $x \in \Lambda$ , on note par  $\bar{x}$  sa classe d'équivalence dans  $\bar{\Lambda}$ . Il découle du lemme de Nakayama le résultat suivant.

**Proposition 3.3.12 ([2, prop. 2.8])**

*Soit  $\{g_1, \dots, g_r\}$  une famille d'éléments de  $\Lambda$  telle que  $(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_r)$  forme une  $\mathbb{C}$ -base de  $\bar{\Lambda}$ . La famille  $\{g_1, \dots, g_r\}$  est alors une famille génératrice du  $\mathcal{O}_n$ -module  $\Lambda$ .*

**Remarque 3.3.13**

Il en résulte l'inégalité  $\dim_{\mathbb{C}}(\bar{\Lambda}) \geq m$ . De plus, le réseau  $\Lambda$  est libre si et seulement si  $\dim_{\mathbb{C}}(\bar{\Lambda}) = m$ .

Les opérateurs  ${}^s\Delta_{i,1}$  en restriction à  $W$  s'identifient aux parties semi-simples des applications  $\mathbb{C}$ -linéaires  $\bar{\Delta}_{i,1} : \bar{\Lambda} \rightarrow \bar{\Lambda}$  induites par les  $\Delta_{i,1}$ . Par conséquent, chacune des applications  ${}^s\Delta_{i,1}$  en restriction à  $W$  est diagonalisable et son spectre est égal à celui de  $\bar{\Delta}_{i,1}$ . Puisque les applications  ${}^s\Delta_{i,1}$  commutent deux à deux, il existe une base commune  $(f_1, \dots, f_r)$  de  $W$  constituée de vecteurs propres associés aux applications  ${}^s\Delta_{i,1}$ . D'après la proposition précédente, la famille  $\{f_1, \dots, f_r\}$  est une famille génératrice du réseau  $\Lambda$ . On peut dire mieux dans le cas où chacune des applications linéaires  $\bar{\Delta}_{i,1}$  a un **bon spectre** au sens de la Définition 3.1.1.

**Théorème 3.3.14 ([33, Théorème 3.4, (i)])**

Soit  $\Lambda$  un réseau de  $K_n^m$  stable par les opérateurs  $\Delta_{i,1}$  pour  $1 \leq i \leq n$ . On suppose de plus que les applications  $\bar{\Delta}_{i,1} : \bar{\Lambda} \rightarrow \bar{\Lambda}$  ont un bon spectre. Dans ce cas, le réseau  $\Lambda$  est libre. De plus, si  $(f_1, \dots, f_m)$  est une base du réseau  $\Lambda$  constituée de vecteurs propres communs aux opérateurs  ${}^s\Delta_{i,1}$ , alors pour  $1 \leq i \leq n$ , la matrice de l'application  $K_n$ -linéaire  ${}^n\Delta_{i,1}$  écrite dans la base  $(f_1, \dots, f_m)$  est à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .

En particulier, si  $Z$  désigne les coordonnées d'un vecteur de  $K_n^m$  dans la base  $(f_1, \dots, f_m)$ , les opérateurs  $\Delta_i$  s'écrivent dans la base  $(f_1, \dots, f_m)$  sous la forme

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} - \frac{B^{(i)}Z}{x_i}$$

où  $B^{(i)} \in M_m(\mathbb{C})$ .

La base de vecteurs propres  $(f_1, \dots, f_m)$  existe toujours d'après les considérations précédentes. Remarquons que les opérateurs  ${}^s\Delta_{i,1}$  s'écrivent dans la base  $(f_1, \dots, f_m)$  sous la forme

$$x_i \frac{\partial Z}{\partial x_i} + D^{(i)}Z$$

où  $D^{(i)} \in M_m(\mathbb{C})$  est une matrice diagonale constituée des valeurs propres de  $\bar{\Delta}_{i,1}$ .

**Remarque 3.3.15**

Un calcul montre que si une application  $K_n$ -linéaire commute avec les opérateurs  ${}^s\Delta_{i,1}$ , sa matrice écrite dans la base  $(f_1, \dots, f_m)$  appartient à  $M_m(\mathbb{C})$  [33].

**Théorème 3.3.16 ([33, Théorème 3.4, (ii)])**

Soit  $\Lambda$  un réseau stable par les opérateurs  $\Delta_{i,1}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Il existe un réseau libre  $\Lambda' \subseteq \Lambda$  stable par  $\Delta_{i,1}$  pour  $1 \leq i \leq n$  et une base  $(g_1, \dots, g_m)$  de  $\Lambda'$  dans laquelle les opérateurs  $\Delta_{i,1}$  s'écrivent sous la forme  $x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + B^{(i)}$  avec  $B^{(i)} \in M_m(\mathbb{C})$ .



**Démonstration.** On reprend les notations précédentes. Soit  $(f_1, \dots, f_r)$  une  $\mathbb{C}$ -base de  $W$  de vecteurs propres communs aux opérateurs  ${}^s\Delta_{i,1}$ . On a donc pour  $1 \leq i \leq n$ , et  $1 \leq j \leq r$

$${}^s\Delta_{i,1}(f_j) = \alpha_{i,j}f_j, \quad \alpha_{i,j} \in \mathbb{C}.$$

Soit  $\beta^{(j)} \in \mathbb{N}^m$  fixé pour  $1 \leq j \leq r$ . On a alors pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq r$

$${}^s\Delta_{i,1}(x^{\beta^{(j)}} f_j) = (\alpha_{i,j} + \beta_i^{(j)}) f_j.$$

On peut choisir les  $n$ -uplets  $\beta^{(j)}$  de telle sorte que pour  $1 \leq i \leq n$ , les éléments de la famille  $\{\alpha_{i,j} + \beta_i^{(j)} : j = 1, \dots, r\}$  ne diffèrent pas d'un entier non nul.

Pour le voir, il suffit de partitionner l'ensemble  $\{\alpha_{i,j} : 1 \leq j \leq r\}$  pour chaque  $1 \leq i \leq n$  par la relation

$$\alpha_{i,j} \sim \alpha_{i,\ell} \Leftrightarrow \alpha_{i,j} - \alpha_{i,\ell} \in \mathbb{Z}.$$

Si  $\bar{\alpha}_{i,j}$  désigne la classe d'équivalence de  $\alpha_{i,j}$ , alors on pose  $\beta_i^{(j)}$  égal à la différence entre le représentant de  $\bar{\alpha}_{i,j}$  de partie réelle la plus grande et  $\alpha_{i,j}$ .

On pose  $g_j = x^{\beta^{(j)}} f_j$  pour  $1 \leq j \leq r$ . Soit  $\Lambda'$  le  $\mathcal{O}_n$ -module engendré par les  $g_j$ . C'est un réseau de  $K_n^m$  puisque la famille  $\{g_j : j = 1, \dots, r\}$  engendre le  $K_n$ -espace vectoriel  $K_n^m$ . Les opérateurs  ${}^s\Delta_{i,1}$  induisent des applications  $\mathbb{C}$ -linéaires  ${}^s\bar{\Delta}_{i,1}$  sur  $\bar{\Lambda}'$  qui, par construction, ont un bon spectre. Il en résulte que le réseau  $\Lambda'$  est libre d'après le Théorème 3.3.14.

Quitte à faire une réindexation, on peut extraire de la famille  $\{g_1, \dots, g_r\}$  une base  $(g_1, \dots, g_m)$  du réseau  $\Lambda'$ . De plus, les opérateurs  ${}^s\Delta_{i,1}$  s'écrivent dans la base  $(g_1, \dots, g_m)$  sous la forme

$$x_i \frac{\partial Z}{\partial x_i} + \text{diag}(\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,m})Z, \quad \lambda_{i,j} \in \mathbb{C},$$

les matrices  $\text{diag}(\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,m})$  ayant un bon spectre. Comme les applications  ${}^n\Delta_{i,1}$  commutent avec les opérateurs  ${}^s\Delta_{j,1}$ , leur matrice dans la base  $(g_1, \dots, g_m)$  appartient alors à  $M_m(\mathbb{C})$  d'après la Remarque 3.3.15. Il en résulte que pour  $1 \leq i \leq n$ ,

$${}^n\Delta_{i,1}(\Lambda') \subseteq \Lambda',$$

et donc que pour  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\Delta_{i,1}(\Lambda') \subseteq \Lambda'.$$

□

### 3.3.3 Version effective

Nous montrons ici comment adapter le travail de R. Gérard et A.H.M. Levelt afin de calculer une matrice fondamentale de solutions formelles d'un système de Pfaff de première espèce  $dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Y$ . On pose  $\Lambda = \mathcal{O}_n^m$ . Soient  $P(x)$  la matrice d'une base de  $\Lambda$  de vecteurs propres communs aux  ${}^s\Delta_{i,1}$  écrits dans la base canonique et  $x^\beta = \text{diag}(x^{\beta^{(1)}}, \dots, x^{\beta^{(m)}})$  où les  $\beta^{(i)}$  ont été définis dans la démonstration du Théorème 3.3.16. La transformation de jauge  $Y = P(x)x^\beta Z$  conduit à un système de Pfaff de première espèce

$$dZ = \left( \sum_{i=1}^n \frac{B^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Z, \quad B^{(i)} \in M_m(\mathbb{C}).$$

**Calcul des matrices  $B^{(i)}$**  Soit  $dZ = \left( \sum_{i=1}^n \frac{C^{(i)}}{x_i} Z \right)$  le système de Pfaff de première espèce obtenu après la transformation de jauge  $Y = PZ$  dans le système  $dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Y$ . En posant pour  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\beta_i = \text{diag}(\beta_i^{(1)}, \dots, \beta_i^{(m)}),$$

on a alors

$$B^{(i)} = x^{-\beta} C^{(i)} x^\beta - \beta_i.$$

On pose pour  $1 \leq i \leq n$ ,  $\gamma_i = \max_{1 \leq j, \ell \leq m} (|\beta_i^{(j)} - \beta_i^{(\ell)}|)$  et

$$\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n + 1. \quad (3.17)$$

Il suffit alors de connaître  $C^{(i)} \bmod \mathfrak{M}^\gamma$  pour pouvoir calculer  $B^{(i)}$ . Pour cela, il suffit de calculer  $P(x) \bmod \mathfrak{M}^\gamma$ .

**Calcul de  $P(x)$**  Le calcul de  $P(x)$  se fait en deux étapes. Dans un premier temps, on calcule  $P(x) \bmod \mathfrak{M}^\gamma$  pour pouvoir déterminer les matrices  $B^{(i)}$ . Une fois les matrices  $B^{(i)}$  connues, on peut alors calculer  $P(x) \bmod \mathfrak{M}^\ell$  pour  $\ell \geq \gamma$  arbitraire.

**Calcul de  $P(x) \bmod \mathfrak{M}^\gamma$**  Soit  $\phi_i$  l'application  $\mathbb{C}$ -linéaire induite par  $\Delta_{i,1}$  sur  $\mathcal{O}_n^m / \mathfrak{M}^\gamma \mathcal{O}_n^m$ . On peut écrire la matrice de  $\phi_i$  dans la base monomiale  $\{x^\alpha e_i, |\alpha| < \gamma, i = 1, \dots, m\}$ . On détermine dans un premier temps les parties semi-simples  $s_i$  des  $\phi_i$ . On peut reprendre une idée de A.H.M. Levelt pour cela [51]. Si  $p_i(\lambda)$  désigne la partie sans facteur carré du polynôme minimal de  $\phi_i$  et si  $d_i$  est un entier tel que  $p_i^{d_i}(\lambda)$  soit un polynôme annulateur de  $\phi_i$ , on calcule un polynôme  $g_i(\lambda)$  qui vérifie

$$p_i(g_i) \equiv 0 \pmod{p_i^{d_i}}, \quad g_i \equiv \lambda \pmod{p_i}.$$

Le polynôme  $g_i(\lambda)$  s'obtient par une remontée de Hensel. La partie semi-simple est alors égale à  $g_i(\phi_i)$ .

On détermine ensuite un supplémentaire  $W_\gamma$  de  $\mathfrak{M}\mathcal{O}_n^m/\mathfrak{M}^\gamma\mathcal{O}_n^m$  dans  $\mathcal{O}_n^m/\mathfrak{M}^\gamma\mathcal{O}_n^m$  stable par les applications  $s_i$ . On est donc dans la situation où l'on doit déterminer un supplémentaire stable par une famille finie d'endomorphismes semi-simples qui commutent deux à deux. Une façon de procéder est de se ramener à la situation d'un seul endomorphisme en prenant une combinaison générique  $s = \sum y_i s_i$  de la famille d'endomorphismes [9]. Un supplémentaire stable par cet endomorphisme  $s$  est génériquement stable par les endomorphismes  $s_i$ .

On détermine ensuite une base  $(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)$  de  $W_\gamma$  constituée de vecteurs propres communs aux  $s_i$ .

**Lemme 3.3.17**

*Le sous-espace vectoriel  $W_\gamma$  provient d'un supplémentaire  $W$  de  $\mathfrak{M}\mathcal{O}_n^m$  dans  $\mathcal{O}_n^m$  stable par les opérateurs  ${}^s\Delta_{i,1}$ . De même la base  $(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)$  provient d'une base  $(f_1, \dots, f_m)$  de  $W$  constituée de vecteurs propres communs aux  ${}^s\Delta_{i,1}$ .*

**Démonstration.** On pose  $\Lambda = \mathcal{O}_n^m$ . Par construction, le sous-espace vectoriel  $W_\gamma$  est un supplémentaire de  $\mathfrak{M}\Lambda/\mathfrak{M}^\gamma\Lambda$  dans  $\Lambda/\mathfrak{M}^\gamma\Lambda$  invariant par les parties semi-simples  ${}^s\Delta_{i,1} \bmod \mathfrak{M}^\gamma\Lambda$ . Il s'agit de montrer qu'il existe  $W$  comme dans l'énoncé tel que  $W \bmod \mathfrak{M}^\gamma\Lambda = W_\gamma$ .

Pour cela, on note, pour  $\ell < \gamma$ ,  $W_\ell$  l'image de  $W_\gamma$  par l'application canonique, surjective,  $\theta_{\gamma,\ell} : \Lambda/\mathfrak{M}^\gamma\Lambda \rightarrow \Lambda/\mathfrak{M}^\ell\Lambda$ .

On s'aperçoit que :

- l'espace vectoriel  $\Lambda/\mathfrak{M}^\ell\Lambda$  s'écrit  $W_\ell \oplus \mathfrak{M}\Lambda/\mathfrak{M}^\ell\Lambda$  ;
- le sous-espace vectoriel  $W_\ell$  est invariant par les applications linéaires  ${}^s\Delta_{i,1} \bmod \mathfrak{M}^\ell\Lambda$ .

De plus, on a par construction  $\theta_i(W_i) = W_{i-1}$  pour  $i \leq \gamma$ . On laisse le soin au lecteur de vérifier ces affirmations.

On construit maintenant  $W_\ell$  pour  $\ell > \gamma$ . On procède par récurrence en suivant la démonstration du Théorème 3.3.10.

On obtient un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $W := \varprojlim W_\ell$  qui vérifie les conditions du lemme. De plus, on a par construction  $W \bmod \mathfrak{M}^\gamma\Lambda = W_\gamma$ .

Il reste à voir l'existence d'une base  $(f_1, \dots, f_m)$  de  $W$  constituée de vecteurs propres communs aux opérateurs  ${}^s\Delta_{i,1}$  avec  $\pi_\gamma(f_i) = \bar{f}_i$ . On construit les vecteurs  $f_i$  par leurs approximations successives modulo  $\mathfrak{M}^\ell\Lambda$  où  $\ell$  est un entier positif.

Pour  $\ell \leq \gamma$ , on pose  $\pi_\ell(f_i) = \theta_{\gamma,\ell}(\bar{f}_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$ . On laisse le soin au lecteur de vérifier que la famille  $(\pi_\ell(f_1), \dots, \pi_\ell(f_m))$  est une base de  $W_\ell$  constituée de vecteurs propres communs aux applications linéaires  ${}^s\Delta_{i,1} \bmod \mathfrak{M}^\ell\Lambda$ . De plus, on a  $\theta_\ell(\pi_\ell(f_i)) = \pi_{\ell-1}(f_i)$  pour tout  $\ell \leq \gamma$ .

Pour  $\ell > \gamma$ , on construit la famille  $(\pi_\ell(f_1), \dots, \pi_\ell(f_m))$  par récurrence sur  $\ell$ . On explique la construction pour  $\ell = \gamma + 1$ , celle-ci étant en tout point

identique pour  $\ell$  quelconque. L'application  $\theta_{\gamma+1} : \Lambda/\mathfrak{M}^{\gamma+1}\Lambda \rightarrow \Lambda/\mathfrak{M}^\gamma\Lambda$  induit un isomorphisme de  $W_{\gamma+1}$  sur  $W_\gamma$ . Soit  $\theta_{\gamma+1}^{-1}$  l'application réciproque. On pose  $\pi_{\gamma+1}(f_i) = \theta_{\gamma+1}^{-1}(f_i)$  pour  $1 \leq i \leq m$ . La famille  $(\pi_{\gamma+1}(f_1), \dots, \pi_{\gamma+1}(f_m))$  ainsi définie est une base de  $W_{\gamma+1}$  constituée de vecteurs communs aux opérateurs  ${}^s\Delta_{i,1} \bmod \mathfrak{M}^{\gamma+1}\Lambda$ . De plus, on a par construction

$$\theta_{\gamma+1}(\pi_{\gamma+1}(f_i)) = \pi_\gamma(f_i) (= \bar{f}_i).$$

On pose alors  $f_i := \varprojlim \pi_\ell(f_i)$ . La famille  $(f_1, \dots, f_m)$  a alors toutes les propriétés requises.

□

Si  $P(x)$  désigne la matrice constituée des vecteurs  $f_i$  écrits dans la base canonique, on a donc calculé  $P(x) \bmod \mathfrak{M}^\gamma$ . On peut dès lors calculer les  $B^{(i)}$  correspondants.

**Calcul de  $P(x) \bmod \mathfrak{M}^k$  pour  $k \geq \gamma$**  On pose  $C^{(i)} = x^\beta B^{(i)} x^{-\beta} + \beta_i$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Par construction, ces matrices appartiennent à  $M_m(\mathcal{O}_n)$ . De plus le spectre de  $C_{(0)^n}^{(i)}$  est égal à celui de  $A_{(0)^n}^{(i)}$ .

La matrice  $P$  vérifie le système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} x_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} = A^{(1)}P - PC^{(1)} \\ \vdots \\ x_n \frac{\partial P}{\partial x_n} = A^{(n)}P - PC^{(n)} \end{cases} \quad (3.18)$$

On calcule  $P$  grâce aux relations de récurrence auxquelles satisfont les coefficients  $P_\alpha$  obtenues en injectant  $P$  dans le système d'équations aux dérivées partielles. Plus précisément, soit  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  avec  $|\alpha| \geq \gamma$ . Il existe alors  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que les matrices  $A_{(0)^n}^{(i)}$  et  $C_{(0)^n}^{(i)} - \alpha_i \mathbf{I}_m$  ont un spectre disjoint. Le coefficient en  $x^\alpha$  dans l'équation  $x_i \frac{\partial P}{\partial x_i} = A^{(i)}P - PC^{(i)}$  donne la relation de récurrence

$$A_{(0)^n}^{(i)} P_\alpha - P_\alpha (C_{(0)^n}^{(i)} - \alpha_i \mathbf{I}_m) = - \sum_{\mu \prec \alpha} \left( A_{\alpha-\mu}^{(i)} P_\mu - P_\mu C_{\alpha-\mu}^{(i)} \right).$$

Ce qui montre que  $P_\alpha$  est entièrement déterminé par les coefficients  $P_\mu$  qui le précèdent pour la relation  $\preceq$ . Comme on connaît par ailleurs  $P(x) \bmod \mathfrak{M}^\gamma$ , on est en mesure de calculer  $P(x) \bmod \mathfrak{M}^k$  pour tout  $k \geq \gamma$ .

**Une version rationnelle** Le calcul d'une base de vecteurs propres de  $W$  communs aux  ${}^s\Delta_{i,1}$  (en définitive de  $W_\gamma$ ) est à éviter en pratique. Dans la démonstration du Théorème 3.3.14, on peut assouplir les hypothèses sur le choix de la base  $(f_1, \dots, f_m)$  (on se place ici dans la situation où  $\Lambda = \mathcal{O}_n^m$ ) de telle sorte que les calculs effectués soient rationnels. Cela veut dire que tous

les calculs s'effectuent dans le corps engendré par les coefficients des matrices  $A_\alpha^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , avec  $|\alpha| < \gamma$ .

Ce choix de base s'obtient grâce à la proposition suivante.

**Proposition 3.3.18**

Soient  $\Lambda = \mathcal{O}_n^m$  et  $W$  un supplémentaire de  $\mathfrak{M}\Lambda$  invariant par les opérateurs  ${}^s\Delta_{i,1}$  ( $W$  est donc un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $m$ ). On suppose que  $W$  se décompose sous la forme

$$W = W^{(1)} \oplus \dots \oplus W^{(s)},$$

de telle sorte que :

- (i)  ${}^s\Delta_{i,1}(W^{(j)}) \subseteq W^{(j)}$ , pour  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq s$  ;
- (ii) pour  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq s$ , l'application  ${}^s\Delta_{i,1}$  en restriction à  $W^{(j)}$  a un bon spectre ;
- (iii) pour chaque  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j, \ell \leq s$ , on a  
soit  $\text{spec}({}^s\Delta_{i,1}|_{W^{(j)}}) \cap \text{spec}({}^s\Delta_{i,1}|_{W^{(\ell)}}) + \mathbb{Z} = \emptyset$ ,  
soit il existe  $n_{j,\ell} \in \mathbb{Z}$  tel que  $\text{spec}({}^s\Delta_{i,1}|_{W^{(j)}}) = \text{spec}({}^s\Delta_{i,1}|_{W^{(\ell)}}) + n_{j,\ell}$ .

Dans ces conditions, il existe des  $n$ -uplets  $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s)} \in \mathbb{N}^n$  qui ne dépendent que des matrices  $A_{(0)^n}^{(i)}$ , de telle sorte que le réseau

$$\Lambda' = \mathcal{O}_n x^{\alpha^{(1)}} W^{(1)} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_n x^{\alpha^{(s)}} W^{(s)}$$

soit invariant par les opérateurs  $\Delta_{i,1}$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

De plus, si  $(g^{(j)})$  désigne une  $\mathbb{C}$ -base de  $x^{\alpha^{(j)}} W^{(j)}$  pour  $1 \leq j \leq s$  et si  $(g) = (g^{(1)}, \dots, g^{(s)})$  désigne la  $\mathcal{O}_n$ -base de  $\Lambda'$  réunion des bases  $(g^{(j)})$ , alors pour  $1 \leq i \leq n$ , on a

$$\text{mat}(\Delta_{i,1}, (g)) \in M_m(\mathbb{C}).$$

Pour montrer ce résultat, nous avons besoin du lemme suivant qui résulte du Lemme 3.1.2.

**Lemme 3.3.19**

Soient  $D^{(i)} \in M_m(\mathbb{C})$ ,  $1 \leq i \leq n$  des matrices ayant un bon spectre. Soit  $N \in M_m(\mathcal{O}_x)$  où  $\mathcal{O}_x = S^{-1}\mathcal{O}_n$  avec  $S = \{x^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ . Si  $N$  vérifie

$$x_i \frac{\partial N}{\partial x_i} = ND^{(i)} - D^{(i)}N \text{ pour } 1 \leq i \leq n,$$

alors  $N \in M_m(\mathbb{C})$ .

**Démonstration.** Puisque  $N \in M_m(\mathcal{O}_x)$ , on peut écrire

$$N = \sum_{\alpha \succeq \beta} N_\alpha x^\alpha \text{ pour un certain } \beta \in \mathbb{Z}^n.$$

Soit  $\alpha \succeq \beta$  avec  $\alpha_i \neq 0$  pour un certain  $1 \leq i \leq n$ . Le coefficient  $N_\alpha$  vérifie alors

$$\alpha_i N_\alpha = N_\alpha D^{(i)} - D^{(i)} N_\alpha.$$

Mais  $D^{(i)}$  a un bon spectre, donc  $N_\alpha = 0$  d'après le Lemme 3.1.2. Ce qui montre que  $N \in M_m(\mathbb{C})$ .

□

**Démonstration de la Proposition 3.3.18.** On choisit les  $n$ -uplets  $\alpha^{(j)}$ ,  $1 \leq j \leq s$  en définissant pour chaque  $1 \leq i \leq n$  une relation d'équivalence sur les sous-espaces  $W^{(j)}$ ,  $1 \leq j \leq s$ , semblable à celle définie dans la démonstration du Théorème 3.3.16. Plus précisément,  $W^{(j)}$  est équivalent à  $W^{(\ell)}$  pour l'opérateur  ${}^s\Delta_{i,1}$  (on note  $W^{(j)} \underset{i}{\sim} W^{(\ell)}$ ) si et seulement s'il existe un entier  $n_{j,\ell} \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\text{spec}({}^s\Delta_{i,1|W^{(j)}}) = \text{spec}({}^s\Delta_{i,1|W^{(\ell)}}) + n_{j,\ell}.$$

On pose alors  $\alpha_i^{(j)} = \max(n_{j,\ell} : W^{(j)} \underset{i}{\sim} W^{(\ell)})$  pour tous  $1 \leq j \leq s$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Ce choix des  $n$ -uplets  $\alpha^{(j)}$  ne dépend que des matrices de tête  $A_{(0)^n}^{(i)}$ .

Soient alors  $(g^{(j)})$  une base de l'espace vectoriel  $x^{\alpha^{(j)}} W^{(j)}$  pour  $1 \leq j \leq s$  et  $(g)$  la base réunion des bases  $(g^{(j)})$ . On note  $D^{(i)} = \text{mat}({}^s\Delta_{i,1}, (g))$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Par construction, la matrice  $D^{(i)}$  est à coefficients dans  $\mathbb{C}$  et possède un bon spectre. Par ailleurs, la matrice de passage  $T$  de la base canonique à la base  $(g)$  est de la forme  $P \text{diag}(x^{\alpha^{(1)}} \mathbf{I}_{m_1}, \dots, x^{\alpha^{(s)}} \mathbf{I}_{m_s})$  où  $P \in GL_m(\mathcal{O}_n)$  et  $m_i$  est la dimension du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $W^{(i)}$ .

Soit  $N^{(j)} = \text{mat}({}^n\Delta_{j,1}, (g))$  pour  $1 \leq j \leq n$ . Comme la matrice de  ${}^n\Delta_{j,1}$  dans la base canonique est à coefficients dans  $\mathcal{O}_n$ , la matrice  $N^{(j)}$  est à coefficients dans  $\mathcal{O}_x$  au vu de la forme de  $T$ . La commutativité de  ${}^n\Delta_{j,1}$  avec chacun des opérateurs  ${}^s\Delta_{i,1}$  s'écrit dans la base  $(g)$  sous la condition

$$x_i \frac{\partial N^{(j)}}{\partial x_i} = N^{(j)} D^{(i)} - D^{(i)} N^{(j)}.$$

Le lemme précédent montre alors que  $N^{(j)} \in M_m(\mathbb{C})$  pour  $1 \leq j \leq n$ . Il en résulte que  $\text{mat}(\Delta_{i,1}, (g)) \in M_m(\mathbb{C})$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

□

### 3.4 Approche de Takano et Yoshida

L'idée de T. Takano et M. Yoshida est de se ramener à un système ayant un nombre fini de termes dans son développement en appliquant une suite infinie de transformations. Pour cela, T. Takano et M. Yoshida introduisent la notion de *système réduit* et donnent un procédé de réduction. Dans la suite, on appelle cette réduction la réduction au sens de Takano et Yoshida.

### 3.4.1 Réduction relative et réduction forte

Dans la suite,  $\alpha$  désigne un élément de  $\mathbb{N}^n$ .  $B_\alpha^{(\ell)}$  désigne le coefficient en  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$  du développement de  $B^{(\ell)}$  et  $B_{\alpha,i,j}^{(\ell)}$  est le coefficient  $(i, j)$  de la matrice  $B_\alpha^{(\ell)}$ .

#### Définition 3.4.1

Étant donné  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  et  $1 \leq i, j \leq m$ , on dit que le système de Pfaff de première espèce

$$\begin{cases} x_1 \frac{\partial Y}{\partial x_1} = B^{(1)} Y \\ \vdots \\ x_n \frac{\partial Y}{\partial x_n} = B^{(n)} Y \end{cases}$$

est **réduit relativement au triplet**  $(\alpha, i, j)$  si

$$B_{(0)^n, i, i}^{(\ell)} - B_{(0)^n, j, j}^{(\ell)} \neq \alpha_\ell \text{ pour un certain } \ell \Rightarrow B_{\alpha, i, j}^{(1)} = \cdots = B_{\alpha, i, j}^{(n)} = 0. \quad (3.19)$$

On dit que le système de Pfaff de première espèce

$$dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{B^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Y \quad (3.20)$$

est **fortement réduit** s'il est réduit relativement à tout triplet  $(\alpha, i, j)$ . Il est important de noter que sous cette hypothèse, un coefficient non nul  $B_{i,j}^{(\ell)}$  est nécessairement un monôme de la forme

$$\star x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \text{ où } \alpha_s = B_{(0)^n, i, i}^{(s)} - B_{(0)^n, j, j}^{(s)} \in \mathbb{N} \text{ pour } 1 \leq s \leq n.$$

En particulier si le système (3.20) est fortement réduit et si les éléments diagonaux de chacune des matrices  $B_{(0)^n}^{(\ell)}$  ne diffèrent pas d'un entier non nul, alors le système (3.20) est "constant", c'est-à-dire  $B^{(\ell)} \in M_m(\mathbb{C})$  pour  $1 \leq \ell \leq n$ .

L'intérêt des systèmes de Pfaff de première espèce fortement réduits réside dans le résultat suivant.

#### Théorème 3.4.2 ([75, theorem 4])

Considérons un système de Pfaff de première espèce fortement réduit

$$dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{B^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Y.$$

Il existe alors des matrices diagonales  $D_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  dont les éléments diagonaux sont des entiers ne dépendant que des matrices  $B_{(0)^n}^{(j)}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , de telle sorte que la transformation de jauge  $Y = x_1^{D_1} \cdots x_n^{D_n} Z$  conduise à un système de Pfaff de première espèce

$$dZ = \left( \sum_{i=1}^n \frac{C^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Z,$$

avec  $C^{(i)} \in M_m(\mathbb{C})$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

**Démonstration.** Soit  $T$  de la forme prescrite. On a alors pour  $1 \leq \ell \leq n$ ,

$$C^{(\ell)} = x_1^{-D_1} \cdots x_n^{-D_n} B^{(\ell)} x_1^{D_1} \cdots x_n^{D_n} - D_\ell.$$

En particulier le coefficient  $(i, j)$  de  $C^{(\ell)}$  est égal à

$$x_1^{D_{1,j,j}-D_{1,i,i}} \cdots x_n^{D_{n,j,j}-D_{n,i,i}} B_{i,j}^{(\ell)} - D_{\ell,i,j}. \quad (3.21)$$

On a remarqué précédemment qu'un coefficient non nul  $B_{i,j}^{(\ell)}$  est de la forme  $\star x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$  avec  $\alpha_s = B_{(0)^n,i,i}^{(s)} - B_{(0)^n,j,j}^{(s)}$  pour  $1 \leq s \leq n$ .

Par conséquent, il suffit que  $D_{\ell,i,i} - D_{\ell,j,j} = B_{(0)^n,i,i}^{(\ell)} - B_{(0)^n,j,j}^{(\ell)}$ ,  $1 \leq \ell \leq n$  pour que le système obtenu soit "constant". Pour construire les matrices  $D_\ell$  qui vérifient cette propriété, voici comment procéder. Soient  $\ell$  et  $i$  fixés, on choisit  $i_0$  de sorte que  $B_{(0)^n,i,i}^{(\ell)} - B_{(0)^n,i_0,i_0}^{(\ell)}$  soit un entier naturel le plus grand possible. Il n'est pas difficile à voir que si  $B_{(0)^n,i,i}^{(\ell)} - B_{(0)^n,j,j}^{(\ell)}$  est un entier naturel, alors  $B_{(0)^n,i_0,i_0}^{(\ell)} = B_{(0)^n,j_0,j_0}^{(\ell)}$ . On pose alors  $D_{\ell,i,i} = B_{(0)^n,i,i}^{(\ell)} - B_{(0)^n,i_0,i_0}^{(\ell)}$ . On a immédiatement  $D_{\ell,i,i} - D_{\ell,j,j} = B_{(0)^n,i,i}^{(\ell)} - B_{(0)^n,j,j}^{(\ell)}$ .

□

### Remarque 3.4.3

Le procédé est semblable à celui pour obtenir les  $\beta^{(i)}$  dans la démonstration du Théorème 3.3.16.

## 3.4.2 Le procédé de réduction

### Définition 3.4.4

Soit  $N$  un entier naturel non nul. Le système de Pfaff de première espèce  $dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{B^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Y$  est réduit (au sens de Takano et Yoshida) à l'ordre  $N$  si le système est réduit relativement à tout triplet  $(\alpha, i, j)$  avec  $|\alpha| < N$ .

Pour réduire le système à l'ordre 1, T. Takano et M. Yoshida procèdent ainsi. Puisque le système de Pfaff est complètement intégrable, il résulte des relations d'intégrabilité que les matrices  $B_{(0)^n}^{(i)}$  commutent deux à deux. On peut dès lors trouver une transformation de jauge  $Y = PZ$  avec  $P \in GL_m(\mathbb{C})$  qui diagonalise par blocs simultanément les matrices  $B_{(0)^n}^{(i)}$  et où les blocs diagonaux sont des matrices triangulaires inférieures de la forme

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \star & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ \star & \dots & \star & \alpha & \end{bmatrix}.$$



Le système de Pfaff de première espèce obtenu est alors réduit à l'ordre 1. On peut donc supposer dans la suite que le système de Pfaff de première espèce considéré est au moins réduit à l'ordre 1 et que les matrices  $B_{(0)^n}^{(i)}$  sont **triangulaires inférieures**.

Pour passer d'un système de Pfaff de première espèce réduit à l'ordre  $N$  à un système équivalent réduit cette fois-ci à l'ordre  $N + 1$ , on introduit une relation d'ordre  $\leq_e$  sur les coefficients  $(i, j)$  des matrices. Cette relation d'ordre est définie par

$$(i, j) \leq_e (k, \ell) \Leftrightarrow (j \geq \ell) \text{ ou } (j = \ell \text{ et } i \leq k).$$

On a donc  $(1, m) \leq_e \cdots \leq_e (m, m) \leq_e (1, m - 1) \leq_e \cdots \leq_e (m, 1)$ .

T. Takano et M. Yoshida ont montré le résultat suivant.

**Proposition 3.4.5 ([75, proposition 1])**

Soient  $N \geq 1$  un entier naturel et  $(k, \ell)$  un coefficient. Considérons un système de Pfaff de première espèce réduit à l'ordre  $N$

$$dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{B^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Y$$

et qui de plus, est réduit relativement à tout triplet  $(\alpha, i, j)$  avec  $|\alpha| = N$  et  $(i, j) <_e (k, \ell)$ . On suppose de plus que les matrices  $B_{(0)^n}^{(i)}$  sont triangulaires inférieures. Il existe alors une transformation  $Y = U^{(N, k, \ell)} Z$  où  $U^{(N, k, \ell)}$  s'écrit sous la forme

$$U^{(N, k, \ell)} = \mathbf{I}_m + \sum_{|\alpha|=N} U_{\alpha}^{(N, k, \ell)} x^{\alpha},$$

avec

$$U_{\alpha, i, j}^{(N, k, \ell)} = 0 \text{ si } (i, j) \neq (k, \ell)$$

qui conduit à un système de Pfaff de première espèce réduit à l'ordre  $N$  et réduit relativement aux triplets  $(\alpha, i, j)$  avec  $|\alpha| = N$  et  $(i, j) \leq_e (k, \ell)$ .

Remarquons que les matrices de tête  $C_{(0)^n}^{(i)}$  du système de Pfaff de première espèce  $dZ = \left( \sum_{i=1}^n \frac{C^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Z$  obtenu après la transformation de jauge  $Y = U^{(N, k, \ell)} Z$ , sont triangulaires inférieures. En appliquant la proposition précédente  $m^2$  fois à un système de Pfaff de première espèce réduit à l'ordre  $N$ , en respectant l'ordre  $\leq_e$  sur les coefficients des matrices, on obtient un système de Pfaff de première espèce équivalent et réduit à l'ordre  $N + 1$ . Nous donnons une esquisse de la démonstration de la proposition précédente. Nous renvoyons à [75] pour plus de détails.

**Démonstration(esquisse).** La matrice  $C^{(s)}$  pour  $s \in \{1, \dots, n\}$  est égale à

$$C^{(s)} = \left( \mathbf{I}_m + \sum_{|\alpha|=N} U_{\alpha}^{(N, k, \ell)} x^{\alpha} \right)^{-1} \left[ B^{(s)} \left( \mathbf{I}_m + \sum_{|\alpha|=N} U_{\alpha}^{(N, k, \ell)} x^{\alpha} \right) - \sum_{|\alpha|=N} \alpha_s U_{\alpha}^{(N, k, \ell)} x^{\alpha} \right].$$

On voit immédiatement que si  $|\alpha| < N$ , on a

$$C_\alpha^{(s)} = B_\alpha^{(s)}.$$

Ce qui montre que le système de Pfaff de première espèce  $dZ = \left( \sum_{i=1}^n \frac{C^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Z$  est réduit à l'ordre  $N$ .

Si  $|\alpha| = N$ , on obtient

$$C_\alpha^{(s)} = B_\alpha^{(s)} + [B_{(0)^n}^{(s)}, U_\alpha^{(N,k,\ell)}] - \alpha_s U_\alpha^{(N,k,\ell)}.$$

On peut vérifier que si  $(i, j) <_e (k, \ell)$ , on a

$$C_{\alpha,i,j}^{(s)} = B_{\alpha,i,j}^{(s)}.$$

Ce qui montre que le système de Pfaff de première espèce  $dZ = \left( \sum_{i=1}^n \frac{C^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Z$  est également réduit relativement aux triplets  $(\alpha, i, j)$  avec  $|\alpha| = N$  et  $(i, j) <_e (k, \ell)$ .

Il reste à vérifier qu'on peut choisir  $U_\alpha^{N,k,\ell}$  avec  $|\alpha| = N$  de telle sorte que le système de Pfaff de première espèce  $dZ = \left( \sum_{i=1}^n \frac{C^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Z$  soit réduit relativement au triplet  $(\alpha, k, \ell)$ . Mais on a

$$(B_{(0)^n,k,k}^{(s)} - B_{(0)^n,\ell,\ell}^{(s)} - \alpha_s) U_{\alpha,k,\ell}^{N,k,\ell} = C_{\alpha,k,\ell}^{(s)} - B_{\alpha,k,\ell}^{(s)}.$$

Par conséquent si  $B_{(0)^n,k,k}^{(s)} - B_{(0)^n,\ell,\ell}^{(s)} - \alpha_s \neq 0$  pour un certain  $s$ , on peut choisir  $U_{\alpha,k,\ell}^{N,k,\ell}$  de telle sorte que  $C_{\alpha,k,\ell}^{(s)} = 0$ . Ce choix de  $U_{\alpha,k,\ell}^{N,k,\ell}$  entraîne grâce aux relations d'intégrabilité que  $C_{\alpha,k,\ell}^{(i)}$  est nul pour tout  $i$ . D'où la réduction relativement au triplet  $(\alpha, k, \ell)$ .

□

Considérons un système de Pfaff de première espèce

$$dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Y.$$

Soit  $U^{(0)}$  une matrice appartenant à  $GL_m(\mathbb{C})$  qui permet de se ramener au cas où le système est réduit à l'ordre 1 et où les matrices de tête sont triangulaires inférieures. Soit  $N \geq 1$  et  $T^{(N)} = U^{(0)} U^{(1,1,m)} \dots U^{(1,m,1)} \dots U^{(N,m,1)}$  la transformation correspondant aux étapes successives de réduction du système de Pfaff de première espèce. La transformation  $Y = T^{(N)} Z$  conduit à un système de Pfaff de première espèce réduit à l'ordre  $N + 1$ . Par construction, la suite de matrices  $T^{(N)}$  converge vers un élément  $T \in GL_m(\mathcal{O}_n)$  et la transformation  $Y = TZ$  donne un système de Pfaff de première espèce fortement réduit. On a donc obtenu :

**Théorème 3.4.6 ([75, theorem 2])**

Considérons un système de Pfaff de première espèce

$$dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Y.$$

Il existe alors une transformation  $Y = TW$  avec  $T \in GL_m(\mathcal{O}_n)$  qui donne un système de Pfaff de première espèce fortement réduit  $dW = \left( \sum_{i=1}^n \frac{C^{(i)}}{x_i} dx_i \right) W$ .

**3.4.3 Calcul effectif du système  $dZ = \left( \sum_{i=1}^n \frac{B^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Z$**

Une fois qu'on a appliqué la transformation de jauge  $Y = TW$  donnée au Théorème 3.4.6 pour obtenir un système de Pfaff de première espèce fortement réduit

$$dW = \left( \sum_{i=1}^n \frac{C^{(i)}}{x_i} dx_i \right) W,$$

on applique le Théorème 3.4.2, pour obtenir le système de Pfaff de première espèce constant

$$dZ = \left( \sum_{i=1}^n \frac{B^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Z.$$

Les matrices  $B^{(i)} \in M_m(\mathbb{C})$  peuvent s'obtenir quand on a réduit à un ordre  $N + 1$  suffisamment grand le système de Pfaff de première espèce  $dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Y$ .

Plus précisément, on note  $\{\gamma_1^{(i)}, \dots, \gamma_m^{(i)}\}$  l'ensemble des valeurs propres de la matrice  $A_{(0)n}^{(i)}$  et on pose  $\bar{\gamma}_i = \max_{k,\ell} |\gamma_k^{(i)} - \gamma_\ell^{(i)}|$ . Considérons le système de Pfaff de première espèce obtenu après la transformation  $Y = T^{(N)}Z$ ,

$$dZ = \left( \sum_{i=1}^n \frac{C^{N,(i)}}{x_i} dx_i \right) Z,$$

qui est réduit à l'ordre  $N + 1$ .

**Lemme 3.4.7**

Soit  $N \geq |\bar{\gamma}| = \bar{\gamma}_1 + \dots + \bar{\gamma}_n$ . Soit  $C_{\alpha,k,\ell}^{(i)}$  un coefficient non nul de la matrice  $C_\alpha^{(i)}$ . On a alors  $|\alpha| \leq N$ . En particulier,

$$C_{\alpha,k,\ell}^{N,(i)} = C_{\alpha,k,\ell}^{(i)}.$$

**Démonstration.** L'inégalité  $|\alpha| \leq N$  résulte du fait qu'un coefficient non nul est de la forme  $*x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$  avec  $\alpha_i$  égal à la différence entière entre deux valeurs propres de  $A_{(0)^n}^{(i)}$ .

Par ailleurs, si  $\alpha \in \mathbb{N}^m$ , avec  $|\alpha| \leq N$ , on a par construction, pour tout  $1 \leq i \leq n$  et tout coefficient  $(k, \ell)$

$$C_{\alpha, k, \ell}^{N, (i)} = C_{\alpha, k, \ell}^{(i)},$$

puisque les transformations ultérieures ne modifient pas les termes de degré total inférieur ou égal à  $N$ .

□

### Corollaire 3.4.8

Soit  $N \geq |\bar{\gamma}|$ . Les matrices  $C^{(i)}$  sont obtenues en tronquant les matrices  $C^{N, (i)}$  à l'ordre  $N + 1$ .

**Démonstration.** Cela résulte du fait que le système de Pfaff de première espèce

$$dZ = \left( \sum_{i=1}^n \frac{C^{N, (i)}}{x_i} dx_i \right) Z$$

est réduit à l'ordre  $N + 1$ .

□

Une fois qu'on a déterminé les matrices  $C^{(i)}$ , le calcul des matrices  $B^{(i)}$  est aisé : il suffit de reprendre la démonstration du théorème 3.4.2. A noter que la transformation diagonale du théorème 3.4.2 dépend des différences entières des valeurs propres des matrices  $A_{(0)^n}^{(i)}$ .

### Remarque 3.4.9

On peut raffiner la définition des  $\bar{\gamma}_i$  en ne prenant que les différences entières de valeurs propres de la matrice  $A_{(0)^n}^{(i)}$ . Dans ce cas,  $|\bar{\gamma}|$  est un entier. Les matrices  $C^{(i)}$  s'obtiennent alors en tronquant modulo  $\mathfrak{M}^{|\bar{\gamma}|+1}$  les matrices  $C^{|\bar{\gamma}|+1, (i)}$ .

Avec cette définition de  $\bar{\gamma}$ , on a de plus

$$\gamma = |\bar{\gamma}| + 1.$$

En effet,  $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n + 1$  où  $\gamma_i = \sup_{1 \leq k, \ell \leq m} |\beta_i^{(k)} - \beta_i^{(\ell)}|$ ,  $\beta_i^{(k)}$  étant égal à la différence entière positive entre deux valeurs propres de  $A_{(0)^n}^{(i)}$ .

La détermination des matrices  $B^{(i)}$  par les approches de Gérard et Levelt et Takano et Yoshida, ne dépend donc que des matrices  $A^{(i)} \bmod \mathfrak{M}^{|\bar{\gamma}|+1}$ . Les

termes impliqués dans le développement en série des matrices  $A^{(i)}$  sont donc les termes de degré total inférieur ou égal à  $|\bar{\gamma}|$ . Il y en a exactement

$$n \binom{n + |\bar{\gamma}|}{|\bar{\gamma}|}.$$

Le calcul d'une matrice fondamentale de solutions formelles par l'approche de Takano et Yoshida nécessite la triangulation simultanée des matrices  $A_{(0)n}^{(i)}$ , ce qui rend les calculs impraticables. Une question est donc de savoir si on peut assouplir les hypothèses sur la nécessité que les matrices  $B_{(0)n}^{(i)}$  soient triangulaires inférieures dans l'énoncé de la proposition 3.4.5.

Nous n'avons pas fait d'implantation des deux méthodes présentées ci-dessus.



# Chapitre 4

## Réduction du rang : cas ordinaire

L'objectif de ce chapitre est de rappeler deux algorithmes qui permettent de réduire le rang d'un système différentiel linéaire possédant une singularité en  $x = 0$  : l'algorithme de Moser [37, 7] et celui de Levelt [50]. Les deux algorithmes présentés retournent un système équivalent de rang minimal. Nous mettons ensuite en évidence la dualité entre les versions ascendantes et descendantes de l'algorithme de Levelt (Corollaire 4.2.9). Cette propriété nous sera utile au prochain chapitre. Nous terminons le chapitre par une comparaison succincte entre les algorithmes de Moser et de Levelt. Les résultats énoncés dans ce chapitre restent valables si l'on remplace  $\mathbb{C}$  par n'importe quel corps de caractéristique 0.

Dans la suite,  $\mathcal{O}$  désigne l'anneau des séries formelles  $\mathbb{C}[[x]]$  et  $K$  son corps des fractions. Soit  $f \in K$ ,  $\text{ord}_x(f)$  désigne l'ordre en  $x$  de  $f$  : c'est le plus petit entier  $k \geq 0$  tel que  $x^k f \in \mathcal{O}$ . De même si  $M$  est une matrice de taille  $m \times m$  à coefficients dans  $K$ ,  $\text{ord}_x(M)$  désigne  $\max_{1 \leq i, j \leq m} (\text{ord}_x(M_{i,j}))$ .

### Définition 4.0.1

Soit un système différentiel ordinaire linéaire

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y, \quad A(x) = \frac{1}{x^{p+1}}(A_0 + A_1x + \dots) \in M_m(K), \quad A_i \in M_m(\mathbb{C}) \quad (4.1)$$

avec  $p \in \mathbb{Z}$  et  $A_0 \neq 0$ . Le **rang** du système (4.1) est égal à  $\text{ord}_x(A(x)) - 1$ .

Par définition, le rang d'un système différentiel où  $x = 0$  est un point ordinaire, est égal à  $-1$  (cas où  $p \leq -1$ ). Dans le cas où  $p \geq 0$ , le rang du système (4.1) est égal à  $p$ .

Le problème de la réduction du rang du système (4.1) dans le cas où  $p \geq 0$ , consiste à trouver un système équivalent de rang strictement plus petit, voire de rang minimal. Cela revient donc à trouver, s'il en existe, une transformation

de jauge  $Y = TZ$  avec  $T \in GL_m(K)$ , de telle sorte que le système obtenu soit de la forme

$$\frac{dZ}{dx} = B(x)Z, \quad B(x) = \frac{1}{x^{q+1}}(B_0 + B_1x + \dots) \in M_m(K), \quad B_i \in M_m(\mathbb{C}),$$

avec  $B_0 \neq 0$ , et de rang strictement plus petit que celui du système (4.1).

Rappelons que la matrice  $B(x)$  est donnée par

$$B(x) = T^{-1}AT - T^{-1}\frac{dT}{dx}. \quad (4.2)$$

Si le rang du système obtenu est  $-1$ ,  $x = 0$  est un point ordinaire du système  $\frac{dZ}{dx} = B(x)Z$  : ce dernier système possède alors une matrice fondamentale de solutions appartenant à  $M_m(\mathcal{O})$ .

Si  $q = 0$ , le système  $\frac{dZ}{dx} = B(x)Z$  est de première espèce, et par conséquent le système (4.1) est singulier régulier en  $x = 0$ .

Si  $q \geq 0$  est minimal, ce qui signifie que

$$q = \min_{T \in GL_m(K)} \operatorname{ord}_x \left( T^{-1}AT - T^{-1}\frac{dT}{dx} \right) - 1,$$

alors  $q$  est appelé le **vrai rang de Poincaré** du système (4.1). C'est un invariant du système qui donne des informations sur la nature des solutions formelles du système (4.1) et est un préalable au calcul de ses solutions. À noter qu'au chapitre précédent, on a vu le type de solutions rencontrées quand le vrai rang de Poincaré du système était égal à 0.

#### Remarque 4.0.2

Si on ne peut réduire le rang du système (3.5), cela veut dire que celui-ci est déjà minimal.

## 4.1 Travaux de Moser

### Définition 4.1.1

Le **rang de Moser** du système (4.1) est le nombre rationnel noté  $m(A)$  égal à

$$p + \frac{r}{m}$$

où  $r$  est le rang de la matrice  $A_0$ . Par convention, le rang de Moser est égal à 0 si  $x = 0$  est un point ordinaire.

Le **vrai rang de Moser** du système (4.1) est le nombre noté  $\mu(A)$  égal à

$$\inf_{T \in GL_m(K)} m \left( T^{-1}AT - T^{-1}\frac{dT}{dx} \right).$$



J. Moser [55] a donné un critère effectif pour décider si le rang de Moser du système (4.1) peut être réduit. On dit que le système (4.1) est **réductible au sens de Moser** s'il existe une transformation de jauge  $Y = TZ$  avec  $T \in GL_m(K)$  telle que le système obtenu  $\frac{dZ}{dx} = B(x)Z$  a un rang de Moser plus petit. Autrement dit,

$$m((T^{-1}AT - T^{-1}\frac{dT}{dx})) < m(A).$$

Dans le cas contraire, on dit que le système (4.1) est **irréductible au sens de Moser**. Dans cette situation, on a donc  $m(A) = \mu(A)$ . Il est important de remarquer qu'un système irréductible au sens de Moser a nécessairement un rang minimal : celui-ci est donc égal au vrai rang de Poincaré du système.

### 4.1.1 Résultats théoriques

Étant donné le système (4.1), on pose  $\mathfrak{P}(\lambda) = (x^r \det(\frac{A_0}{x} + A_1 + \lambda \mathbf{I}_m))|_{x=0}$  où  $r$  est le rang de la matrice  $A_0$ . On peut vérifier que  $\mathfrak{P}(\lambda)$  est un polynôme en  $\lambda$  de degré au plus égal à  $m - r$ .

#### **Théorème 4.1.2 ([55, theorem 1])**

*Sous l'hypothèse  $m(A) > 1$ , le système différentiel (4.1) est réductible au sens de Moser si et seulement si le polynôme  $\mathfrak{P}(\lambda)$  est identiquement nul.*

#### **Remarque 4.1.3**

*Dans le cas où  $m(A) \leq 1$ , le système (4.1) est de première espèce en  $x = 0$ .*

Par ailleurs, J. Moser a précisé le type de transformations  $Y = TZ$  qui permettent de réduire le rang de Moser du système (4.1) :

#### **Théorème 4.1.4 ([55, theorem 2])**

*Toujours sous l'hypothèse  $m(A) > 1$ , si le système différentiel (4.1) est réductible au sens de Moser, il existe une transformation de jauge  $Y = TZ$  avec  $T$  de la forme*

$$T(x) = (P_0 + P_1x) \text{diag}(1, \dots, 1, x, \dots, x)$$

*qui réduit au sens de Moser le système différentiel (4.1).*

### 4.1.2 Algorithme de Moser

Plusieurs auteurs [36, 7] ont rendu effective l'approche de J. Moser, notamment dans la construction d'une transformation  $Y = TZ$  pour réduire un système réductible au sens de Moser. On suit librement la présentation donnée dans [7].

On suppose ici que le rang  $p$  du système (4.1) est strictement positif : on a donc  $m(A) > 1$ . Dans un premier temps, on applique une transformation de

jauge  $Y = PZ$  avec  $P \in GL_m(\mathbb{C})$  pour se ramener à la situation où la matrice de tête  $A_0$  est de la forme

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_0^{1,1} & 0_{r \times m-r} \\ A_0^{2,1} & 0_{m-r} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

où  $r$  est le rang de la matrice  $A_0$ . La matrice  $P$  s'obtient en calculant une base du noyau  $(f_{r+1}, \dots, f_m)$  de la matrice  $A_0$  que l'on complète en une base  $(f_1, \dots, f_m)$ . En pratique, on applique un pivot de Gauss sur les colonnes de la matrice  $A_0$ .

On peut donc se placer dans la situation où la matrice de tête  $A_0$  est de la forme (4.3). Dans cette situation, on voit en écrivant la matrice  $A_1$  dans la même structure par blocs que la matrice  $A_0$ , que le polynôme  $\mathfrak{P}(\lambda)$  est égal à

$$\mathfrak{P}(\lambda) = \begin{vmatrix} A_0^{1,1} & A_1^{1,2} \\ A_0^{2,1} & A_1^{2,2} + \lambda \mathbf{I}_{m-r} \end{vmatrix}.$$

Si ce dernier est identiquement nul, le système (4.1) est donc réductible au sens de Moser.

#### Remarque 4.1.5

Si la matrice  $A_0^{1,1}$  est inversible, le polynôme  $\mathfrak{P}(\lambda)$  est non nul de degré  $m - r$  et de coefficient dominant  $\det(A_0^{1,1})$ . Par conséquent, si  $\mathfrak{P}(\lambda) = 0$ , la matrice  $A_0^{1,1}$  est de rang strictement plus petit que  $r$ .

Dans l'algorithme de Moser, on distingue deux situations selon la valeur du rang  $s$  de la matrice

$$\begin{bmatrix} A_0^{1,1} & A_1^{1,2} \end{bmatrix}.$$

**Réduction : cas où  $s < r$**  Dans cette situation, on a nécessairement  $\mathfrak{P}(\lambda) = 0$ . On applique alors la transformation de jauge  $Y = \text{diag}(x\mathbf{I}_r, \mathbf{I}_{m-r})Z$ . La matrice  $B(x)$  du système obtenu  $\frac{dZ}{dx} = B(x)Z$  est de la forme

$$B(x) = \frac{1}{x^{p+1}}(B_0 + B_1x + \dots) \in M_m(K)$$

avec la matrice  $B_0$  égale à

$$B_0 = \begin{bmatrix} A_0^{1,1} & A_1^{1,2} \\ 0_{m-r \times r} & 0_{m-r} \end{bmatrix}.$$

Si  $B_0 \neq 0$ , c'est-à-dire  $s \neq 0$ , on a donc  $m(B) = p + \frac{s}{m} < m(A)$ . Si  $s = 0$ , le rang de  $B$  est plus petit que celui de  $A$ . Dans tous les cas,  $m(B) < m(A)$ .

**Réduction : cas où  $s = r$**  On suppose que  $\mathfrak{P}(\lambda) = 0$ . C'est un cas particulier d'une situation plus générale. On est dans la situation où il existe un entier  $0 \leq \ell \leq m - r$  (ici  $\ell = 0$ ) tel que les matrices  $A_0$  et  $A_1$  peuvent s'écrire dans la même structure par blocs, en ayant posé  $t = m - r - \ell$ ,

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_0^{1,1} & 0_{r \times t} & 0_{r \times \ell} \\ A_0^{2,1} & 0_t & 0_{t \times \ell} \\ 0_{\ell \times r} & 0_{\ell \times t} & 0_\ell \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_1^{1,1} & A_1^{1,2} & A_1^{1,3} \\ A_1^{2,1} & A_1^{2,2} & A_1^{2,3} \\ A_1^{3,1} & 0_{\ell \times t} & A_1^{3,3} \end{bmatrix} \text{ avec } A_1^{3,3} = \begin{bmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \in M_\ell(\mathbb{C})$$

et la condition supplémentaire que la matrice  $[A_0^{1,1} \ A_1^{1,2}]$  soit de rang  $r$ .

Dans ces conditions, on peut construire une transformation de jauge  $Y = PZ$  avec  $P \in GL_m(\mathbb{C})$  pour obtenir un système  $\frac{dZ}{dx} = B(x)Z$  où les matrices  $B_0$  et  $B_1$  ont la structure par blocs suivante avec  $\ell < \ell' \leq m - r$  et  $t' = m - r - \ell'$

$$B_0 = \begin{bmatrix} B_0^{1,1} & 0_{r \times t'} & 0_{r \times \ell'} \\ B_0^{2,1} & 0_{t'} & 0_{t' \times \ell'} \\ 0_{\ell' \times r} & 0_{\ell' \times t'} & 0_{\ell'} \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} B_1^{1,1} & B_1^{1,2} & B_1^{1,3} \\ B_1^{2,1} & B_1^{2,2} & B_1^{2,3} \\ B_1^{3,1} & 0_{\ell' \times t'} & B_1^{3,3} \end{bmatrix} \text{ avec } B_1^{3,3} = \begin{bmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \in M_{\ell'}(\mathbb{C})$$

et la condition supplémentaire que le rang  $s$  de la matrice  $[B_0^{1,1} \ B_1^{1,2}]$  vérifie

$$s < r. \quad (4.4)$$

On s'est ramené d'une certaine façon à la situation précédente.

On applique alors la transformation de jauge  $Z = \text{diag}(x\mathbf{I}_r, \mathbf{I}_{t'}, x\mathbf{I}_{\ell'})W$  au système  $\frac{dZ}{dx} = B(x)Z$ . On obtient un système  $\frac{dW}{dx} = C(x)W$  avec

$$C(x) = \frac{1}{x^{p+1}}(C_0 + C_1x + \dots) \in GL_m(K)$$

et

$$C_0 = \begin{bmatrix} B_0^{1,1} & B_1^{1,2} & 0_{r \times \ell'} \\ 0_{t' \times r} & 0_{t'} & 0_{t' \times \ell'} \\ 0_{\ell' \times r} & 0_{\ell' \times t'} & 0_{\ell'} \end{bmatrix}.$$

On a donc  $m(C) < m(B) (= m(A))$ .

Pour construire la transformation de jauge  $Y = PZ$ , on répète la construction suivante jusqu'à ce que la condition (4.4) soit vérifiée. Expliquons la

construction pour  $\ell = 0$  : elle s'adapte sans peine pour  $0 \leq \ell \leq m - r$  arbitraire.

Comme le polynôme  $\mathfrak{P}(\lambda)$  est égal à

$$\lambda^\ell \begin{vmatrix} A_0^{1,1} & A_1^{1,2} \\ A_0^{2,1} & A_1^{2,2} + \lambda \mathbf{I}_t \end{vmatrix}$$

et qu'il est par ailleurs égal à 0, la matrice

$$G_0 = \begin{bmatrix} A_0^{1,1} & A_1^{1,2} \\ A_0^{2,1} & A_1^{2,2} \end{bmatrix}$$

est singulière. Il existe donc un vecteur ligne  $y = (y_1, \dots, y_m) \in M_{1 \times m}(\mathbb{C})$  tel que  $yG_0 = (0, \dots, 0)$ . L'hypothèse sur le rang de la matrice  $\begin{bmatrix} A_0^{1,1} & A_1^{1,2} \end{bmatrix}$  garantit que l'une des coordonnées  $y_i$  avec  $r + 1 \leq i \leq m$  est non nulle. Pour simplifier le propos et sans perte de généralité, on peut supposer  $y_m = 1$ .

On pose

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m-1} & 0 \\ y_1 & \dots & y_{m-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

La transformation  $Y = PZ$  appliquée au système précédent conduit au système

$$\frac{dZ}{dx} = B(x)Z, \quad B(x) = \frac{1}{x^{p+1}}(B_0 + B_1x + \dots) \in M_m(K)$$

avec les matrices  $B_0$  et  $B_1$ , où l'on a posé  $t = m - r - 1$ , qui s'écrivent avec la même structure par blocs

$$B_0 = \begin{bmatrix} B_0^{1,1} & 0_{r \times t} & 0_{r \times 1} \\ B_0^{2,1} & 0_t & 0_{t \times 1} \\ 0_{1 \times r} & 0_{1 \times t} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} B_1^{1,1} & B_1^{1,2} & B_1^{1,3} \\ B_1^{2,1} & B_1^{2,2} & B_1^{2,3} \\ B_1^{3,1} & 0_{1 \times t} & 0 \end{bmatrix}.$$

On est donc passé de  $\ell = 0$  à  $\ell = 1$  et plus généralement, de  $\ell$  à  $\ell + 1$ . Le fait qu'on va forcément se retrouver dans la situation où la condition (4.4) est vérifiée résulte de la remarque 4.1.5.

## 4.2 Travaux de Gérard et Levelt

On considère dans ce qui suit un  $\frac{d}{dx}$ -opérateur différentiel  $\Delta : K^m \rightarrow K^m$ . Étant donnée une base  $(e) = (e_1, \dots, e_m)$  du  $K$ -espace vectoriel  $K^m$  (par exemple la base canonique), on note  $\text{mat}(\Delta, (e))$  la matrice constituée des vecteurs  $\Delta(e_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$  écrits dans la base  $(e)$ .

En posant  $A(x) = -\text{mat}(\Delta, (e))$  et  $Y \in K^m$  désignant les coordonnées dans la base  $(e)$ , l'opérateur  $\Delta$  s'écrit dans la base  $(e)$  sous la forme

$$\frac{dY}{dx} - A(x)Y.$$

Le système différentiel associé à l'opérateur  $\Delta$  dans la base  $(e)$  est

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y.$$

On a donc une correspondance entre  $\frac{d}{dx}$ -opérateurs différentiels et systèmes différentiels linéaires.

### 4.2.1 Retour sur le langage des réseaux

Rappelons qu'un réseau  $\Lambda$  de  $K^m$  est un  $\mathcal{O}$ -module de type fini qui engendre  $K^m$  comme  $K$ -espace vectoriel. Dans la situation présente,  $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[x]]$  est un anneau principal. Il en résulte que  $\Lambda$  est un réseau libre<sup>1</sup> de rang  $m$ .

Étant donné un entier  $\ell \geq 1$ , on note  $\Delta_\ell$  le  $x^\ell \frac{d}{dx}$ -opérateur différentiel  $x^\ell \Delta$ .

#### Définition 4.2.1

Soit  $\ell \geq 1$  un entier. On dit que le  $\frac{d}{dx}$ -opérateur différentiel  $\Delta$  est  $\ell$ -régulier si il existe un réseau  $\Lambda$  invariant par  $\Delta_\ell$ , c'est-à-dire

$$\Delta_\ell(\Lambda) \subseteq \Lambda.$$

Soit  $(f) = (f_1, \dots, f_m)$  une base d'un réseau invariant par  $\Delta_\ell$ . Il revient au même de dire que la matrice  $B(x) = -\text{mat}(\Delta, (f))$  s'écrit

$$B(x) = \frac{1}{x^\ell}(B_0 + B_1x + \dots).$$

Ce qui signifie que le système différentiel associé à  $\Delta$  s'écrit dans la base  $(f)$

$$\frac{dZ}{dx} = B(x)Z, \quad B(x) = \frac{1}{x^\ell}(B_0 + B_1x + \dots) \in M_m(K) \quad (4.5)$$

et son rang est inférieur ou égal à  $\ell - 1$ . De plus si  $T$  désigne la matrice de passage de la base canonique  $(e)$  à la base  $(f)$ , le système (4.5) s'obtient en appliquant au système (4.1) la transformation de jauge  $Y = TZ$ .

Autrement dit, l'opérateur  $\Delta$  associé au système différentiel (4.1) est  $\ell$ -régulier si et seulement si le système (4.1) est équivalent à un système différentiel de rang inférieur ou égal à  $\ell - 1$ .

<sup>1</sup>Un module sans torsion de type fini sur un anneau principal est libre.

### 4.2.2 Critère de Gérard et Levelt

R. Gérard et A.H.M. Levelt [32] ont associé pour chaque entier  $\ell \geq 1$  un invariant du système, noté  $\rho_\ell$ , obtenu à partir de la construction d'une suite croissante de réseaux. Cet invariant  $\rho_\ell$  est égal à 0 si et seulement si l'opérateur  $\Delta$  est  $\ell$ -régulier et cela se traduit par la stationnarité de la suite de réseaux. Étant donné  $\Lambda$  un réseau arbitraire, R. Gérard et A.H.M. Levelt construisent par récurrence cette suite de réseaux de la façon suivante :

$$\begin{cases} F_0^\ell \Lambda = \Lambda \\ F_{i+1}^\ell \Lambda = F_i^\ell \Lambda + \Delta_i(F_i^\ell \Lambda), \quad i \geq 0 \end{cases}$$

Remarquons que  $F_{i+1}^\ell \Lambda = F_1^\ell F_i^\ell \Lambda$ .

#### Théorème 4.2.2 ([32, Théorèmes 4.1 et 4.2])

Soit un entier  $\ell \geq 1$ . Il y a équivalence entre :

- (i)  $\Delta$  est  $\ell$ -régulier ;
- (ii) pour tout réseau  $\Lambda$ , la suite de réseaux  $(F_i^\ell \Lambda)_{i \geq 0}$  est stationnaire.

Dans ces conditions, la suite  $(F_i^\ell \Lambda)_{i \geq 0}$  est constante à partir de  $i \geq m - 1$ .

L'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) peut se voir très facilement. D'après l'hypothèse (i), il existe un réseau  $\Lambda'$  invariant par  $\Delta_\ell$  et quitte à le multiplier par une puissance adéquate de  $x$ , on peut supposer que  $\Lambda \subseteq \Lambda'$ . La suite  $(F_i^\ell \Lambda)_{i \geq 0}$  est alors une suite croissante de sous-modules du module noethérien  $\Lambda'$  : d'où la stationnarité.

#### Remarque 4.2.3

La propriété que la suite  $(F_i^\ell \Lambda)_{i \geq 0}$  est constante à partir de  $i \geq m - 1$  est prépondérante pour tester la  $\ell$ -régularité. En effet, il suffit de vérifier si l'un des réseaux  $F_i^\ell \Lambda$  avec  $0 \leq i \leq m - 1$  est invariant par  $\Delta_\ell$  pour décider si l'opérateur  $\Delta$  est  $\ell$ -régulier : on a alors

$$F_i^\ell \Lambda = F_{i+1}^\ell \Lambda = F_{i+2}^\ell \Lambda = \dots$$

Pour la vérification, on détermine une base  $(f) = (f_1, \dots, f_m)$  de  $F_i^\ell \Lambda$ , puis on calcule  $B(x) = \text{mat}(\Delta, (f))$ . On détermine alors l'ordre en  $x$  de  $B(x)$ . Si celui-ci est inférieur ou égal à  $\ell$ , l'opérateur  $\Delta$  est  $\ell$ -régulier et le système (4.1) est équivalent au système de rang inférieur ou égal à  $\ell - 1$

$$\frac{dZ}{dx} = B(x)Z.$$

### 4.2.3 Critère de Levelt

A.H.M. Levelt [50] a proposé une autre construction de réseaux dont la stationnarité caractérise la  $\ell$ -régularité de l'opérateur  $\Delta$ . Soient  $\ell \geq 1$  un entier et  $\Lambda$  un réseau, la suite de réseaux est construite de la manière suivante :

$$\begin{cases} F_0^\ell \Lambda = \Lambda \\ F_{-i-1}^\ell \Lambda = \{v \in F_{-i}^\ell \Lambda : \Delta_l(v) \in F_{-i}^\ell \Lambda\}, \quad i \geq 0 \end{cases}$$

Notons que  $F_{-i-1}^\ell \Lambda = F_{-1}^\ell F_{-i}^\ell \Lambda$  et que l'on construit ainsi une suite décroissante de réseaux.

**Théorème 4.2.4** ([50, Theorem -])

Soit un entier  $\ell \geq 1$ . Il y a équivalence entre :

- (i)  $\Delta$  est  $\ell$ -régulier ;
- (ii) pour tout réseau  $\Lambda$ , la suite de réseaux  $(F_{-i}^\ell \Lambda)_{i \geq 0}$  est stationnaire.

Dans ces conditions, la suite  $(F_{-i}^\ell \Lambda)_{i \geq 0}$  est constante à partir de  $i \geq m - 1$ .

L'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) peut se montrer en observant qu'il existe un réseau  $\Lambda' \subseteq \Lambda$  invariant par  $\Delta_\ell$ . La suite  $(F_{-i}^\ell \Lambda)_{i \geq 0}$  s'identifie alors à une suite décroissante de sous-espaces vectoriels du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel quotient  $\Lambda/\Lambda'$ , qui est de dimension finie : ce qui entraîne la stationnarité.

**4.2.4 Algorithme de Levelt : versions ascendante et descendante**

L'algorithme de Levelt [50] prend en entrée le système différentiel (4.1) et retourne un système équivalent de rang minimal. La version ascendante utilise le critère de Gérard et Levelt : on construit une suite croissante de réseaux. La version descendante utilise le critère de Levelt : cette fois-ci on construit une suite décroissante de réseaux.

**version ascendante** La procédure de base **step+** répétée un certain nombre de fois prend en entrée un système différentiel

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y, \quad A(x) = \frac{1}{x^{p+1}}(A_0 + A_1x + \dots) \in M_m(K), \quad A_0 \neq 0$$

de rang  $p > 0$ . Elle consiste à construire une base du réseau  $F_1^p \Lambda$  où  $\Lambda$  est le réseau engendré par la base  $(e) = (e_1, \dots, e_m)$  dans laquelle on a écrit les coordonnées  $Y$ . Le calcul d'une base du réseau  $F_1^p \Lambda$  écrite dans la base  $(e)$  se ramène à de l'algèbre linéaire et découle de l'observation suivante :

Le réseau  $F_1^p \Lambda$  est engendré par  $\{e_1, \dots, e_m, \frac{A_0}{x}e_1, \dots, \frac{A_0}{x}e_m\}$ .

En appliquant un pivot de Gauss sur les colonnes de  $A_0 \in M_m(\mathbb{C})$ , on obtient une base<sup>2</sup>  $(f_1, \dots, f_r)$  de  $\text{Im}(A_0)$  qu'on complète en une base  $(f) = (f_1, \dots, f_m)$  du réseau  $\Lambda$ . La famille  $(\frac{f_1}{x}, \dots, \frac{f_r}{x}, f_{r+1}, \dots, f_m)$  est alors une base du réseau  $F_1^p \Lambda$ . Si  $P \in GL_m(\mathbb{C})$  désigne la matrice de passage de la base  $(e)$  à la base  $(f)$ , la transformation de jauge  $Y = P \text{diag}(\frac{\mathbf{I}_r}{x}, \mathbf{I}_{m-r})Z$  permet d'écrire le système (4.1) dans une base du réseau  $F_1^p \Lambda$ , à savoir  $(\frac{f_1}{x}, \dots, \frac{f_r}{x}, f_{r+1}, \dots, f_m)$ .

<sup>2</sup>En toute rigueur  $\text{Im}(A_0)$  est l'image de l'application  $\bar{\Delta} : \Lambda/x\Lambda \rightarrow \Lambda/x\Lambda$  et on détermine une base  $(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r)$  de  $\text{Im}(\bar{\Delta})$  que l'on complète en une base  $(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)$ .

**Remarque 4.2.5**

Pour déterminer une base et un supplémentaire de  $\text{Im}(A_0)$  on peut également appliquer un pivot de Gauss sur les lignes de  $A_0$ . Cela revient à multiplier à gauche la matrice  $A_0$  par une matrice  $Q$  : les  $m - r$  dernières lignes de  $QA_0$  sont alors nulles,  $r$  étant le rang de  $A_0$ .

Si  $P$  désigne la matrice  $Q^{-1}$ , les  $r$  premières colonnes de  $P$  forment une base de  $\text{Im}(A_0)$  et les colonnes de la matrice  $P\text{diag}(\frac{\mathbf{I}_r}{x}, \mathbf{I}_{m-r})$  forment une base de  $F_1^p \Lambda$ .

**Algorithme 1.****step+**


---

**entrée:**  $A(x)$  ( $= \text{mat}(\Delta, (e))$ ) avec  $\text{ord}_x(A(x)) = p + 1 > 1$   
**sortie:**  $T$  la matrice de passage de la base  $(e)$  à une base du réseau  $F_1^p \Lambda$  où  $\Lambda = \mathcal{O}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}e_m$

---

Calculer le rang  $r$  de  $A_0$  et  $P$  comme dans la remarque 4.2.5.  
 RETOURNER  $P\text{diag}(\frac{\mathbf{I}_r}{x}, \mathbf{I}_{m-r})$ .

L'algorithme de Levelt noté **Levelt+** prend en entrée un système différentiel (4.1) de rang  $p \geq 0$  et retourne un système équivalent de première espèce ou de rang minimal, c'est-à-dire d'ordre minimal. L'algorithme consiste à répéter un certain nombre de fois à un système différentiel de la forme (4.1) la transformation de jauge  $Y = TZ$  où  $T$  est obtenue par la procédure **step+**. La variable  $i$  est incrémentée si le rang reste inchangé : on s'arrête dès que  $i = m$ . Le système est alors de rang minimal, en vertu du critère de Gérard et Levelt.

**Algorithme 2.****Levelt+**


---

**entrée:**  $A(x)$  ( $= \text{mat}(\Delta, (e))$ ) avec  $\text{ord}_x(A(x)) = p + 1 \geq 1$   
**sortie:**  $T(x)$  et  $B(x) = T^{-1}(AT - \frac{dT}{dx})$  avec  $\text{ord}_x(B(x))$  minimal

---

$q := \text{ord}_x(A(x)).$   
 $i := 0.$   
 $T := \mathbf{I}_m. B := A.$   
**Tant que**  $q > 1$  **et**  $i < m$  **faire**  
 $S := \text{step+}(B).$   
 $B := S^{-1}(BS - \frac{dS}{dx}). T := TS.$   
 $i := i + 1.$   
 $q' := \text{ord}_x(B).$   
**Si**  $q' < q$  **alors**  $i := 0$  **fin si**  
 $q := q'.$   
**fin tant que**



RETOURNER( $T, B$ ).

**version descendante** La version descendante de l'algorithme de Levelt, notée **Levelt**– s'obtient en remplaçant la procédure **step**+ dans l'algorithme **Levelt**+ par la procédure **step**–. La correction de l'algorithme est alors basée sur le critère de Levelt.

La procédure **step**– prend en entrée un système différentiel de la forme (4.1) et retourne une base du réseau  $F_{-1}^p \Lambda$ . On obtient une base du réseau  $F_{-1}^p \Lambda$  en calculant dans un premier temps une base  $(f_{r+1}, \dots, f_m)$  de  $\ker(A_0)$  que l'on complète en une base  $(f_1, \dots, f_m)$  du réseau  $\Lambda$ . La famille  $(xf_1, \dots, xf_r, f_{r+1}, \dots, f_m)$  est alors une base du réseau  $F_{-1}^p \Lambda$ .

La base  $(f_1, \dots, f_m)$  peut s'obtenir en appliquant un pivot de Gauss sur les colonnes de  $A_0$ . Cela revient à multiplier  $A_0$  à droite par une matrice  $P \in GL_m(\mathbb{C})$ . La matrice  $P$  est alors la matrice de passage de la base  $(e)$  à la base  $(f)$  et donc  $P \text{diag}(x\mathbf{I}_r, \mathbf{I}_{m-r})$  est la matrice de passage de la base  $(e)$  à une base du réseau  $F_{-1}^p \Lambda$ .

### Algorithme 3.

**step**–

---

**entrée:**  $A(x)$  ( $= \text{mat}(\Delta, (e))$ ) avec  $\text{ord}_x(A(x)) = p + 1 > 1$   
**sortie:**  $T$  la matrice de passage de la base  $(e)$  à une base du réseau  $F_{-1}^p \Lambda$  où  $\Lambda = \mathcal{O}e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}e_m$

---

Calculer le rang  $r$  de  $A_0$  et  $P \in GL_m(\mathbb{C})$  dont les  $m-r$  dernières colonnes forment une base de  $\ker(A_0)$ .

RETOURNER  $P \text{diag}(x\mathbf{I}_r, \mathbf{I}_{m-r})$ .

### Remarque 4.2.6

Si  $T$  désigne la matrice retournée dans **step**–, la transformation  $Y = TZ$  appliquée au système (4.1) est exactement celle que l'on applique dans la situation  $s < r$  de l'algorithme de Moser, à savoir :

- d'abord une transformation de jauge  $Y = PW$  pour se ramener à la situation où la matrice de tête a ses  $m-r$  dernières colonnes nulles ;
- puis appliquer la transformation de jauge  $W = \text{diag}(x\mathbf{I}_r, \mathbf{I}_{m-r})Z$ .

## 4.2.5 Opérateur dual et dualité entre les versions ascendante et descendante

Dans ce paragraphe, nous mettons en évidence la dualité entre la construction de réseaux du paragraphe 4.2.2 et la construction de réseaux du paragraphe 4.2.3 (Corollaire 4.2.9). La propriété de dualité des constructions énoncée ci-après s'étend à la situation du prochain chapitre. Cela résulte de

la démonstration que nous en donnons, qui est la même mot pour mot. Dans le cas ordinaire, nous en déduisons la dualité entre les versions ascendantes et descendantes de l'algorithme de Levelt. Ce que l'on peut voir directement en regardant les opérations effectuées en appliquant chacune des versions de l'algorithme.

Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $m$ . On note  $V^*$  le dual de  $V$ , c'est-à-dire le  $K$ -espace vectoriel  $\text{Hom}_K(V, K)$ . Soit  $\Lambda$  un réseau de  $V$ , on appelle **dual** de  $\Lambda$  le  $\mathcal{O}$ -module  $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\Lambda, \mathcal{O})$  que l'on notera  $\Lambda^*$ . Le  $\mathcal{O}$ -module  $\Lambda^*$  s'identifie alors à un réseau de  $V^*$  [17, p. 46].

#### Définition et Proposition 4.2.7

Soit  $\Delta : V \rightarrow V$  un  $\frac{d}{dx}$ -opérateur différentiel. Étant donné  $\phi \in V^*$ , on définit une forme linéaire  $\Delta^*(\phi) : V \rightarrow K; v \mapsto \frac{d}{dx}(\phi(v)) - \phi(\Delta(v))$ . L'application  $\Delta^* : V^* \rightarrow V^*$  est un  $\frac{d}{dx}$ -opérateur différentiel appelé **opérateur dual** de l'opérateur  $\Delta$ .

Soient  $(e) = (e_1, \dots, e_m)$  une  $K$ -base de  $V$  et  $(e^*) = (e_1^*, \dots, e_m^*)$  la base duale dans  $V^*$ . On a alors

$$\text{mat}(\Delta^*, (e^*)) = -{}^t\text{mat}(\Delta, (e)).$$

Il en découle immédiatement que  $\Delta^{**} = \Delta$ .

Dans ce qui suit,  $\Lambda$  désigne un réseau de  $V$ , et  $\tilde{\Lambda}$  un réseau de  $V^*$ . On se donne une fois pour toute un  $\frac{d}{dx}$ -opérateur  $\Delta$  de  $V$ . Les constructions de réseaux sont obtenues :

- dans  $V$ , en considérant  $\Delta$ ;
- dans  $V^*$ , en considérant  $\Delta^*$ .

#### Lemme 4.2.8

Soit  $\Lambda$  un réseau de  $V$ . Pour tout entier  $\ell \geq 1$ ,  $(F_1^\ell \Lambda)^* = F_{-1}^\ell \Lambda^*$  où le dernier réseau est défini par  $\{\phi \in \Lambda^* : \Delta_\ell^*(\phi) \in \Lambda^*\}$ .

**Démonstration.** Soit  $\phi \in (F_1^\ell \Lambda)^*$ . Il s'agit de montrer que  $\Delta_\ell^*(\phi)(v)$  appartient à  $\mathcal{O}$  pour tout  $v \in \Lambda$ . Or  $\Delta_\ell^*(\phi)(v)$  est égal à  $x^\ell \frac{d}{dx}(\phi(v)) - \phi(\Delta_\ell(v))$ . Comme  $\phi \in (F_1^\ell \Lambda)^*$ , les éléments  $\phi(\Delta_\ell(v))$  et  $\phi(v)$  appartiennent à  $\mathcal{O}$ . En particulier  $x^\ell \frac{d}{dx}(\phi(v)) \in \mathcal{O}$ . Ce qui montre que  $(F_1^\ell \Lambda)^* \subseteq F_{-1}^\ell \Lambda^*$ .

Réciproquement, soit  $\phi \in F_{-1}^\ell \Lambda^*$ . Cela signifie donc que  $\phi$  et  $\Delta_\ell^*(\phi)$  appartiennent à  $\Lambda^*$ . Il suffit de montrer que si  $v \in \Delta_\ell(\Lambda)$  alors  $\phi(v) \in \mathcal{O}$ . Soit  $w \in \Lambda$  tel que  $v = \Delta_\ell(w)$ . Par définition,  $\Delta_\ell^*(\phi)(w)$  appartient à  $\mathcal{O}$ . Or cet élément est égal à  $x^\ell \frac{d}{dx}(\phi(w)) - \phi(v)$ . Le premier terme appartenant à  $\mathcal{O}$ , on en déduit que  $\phi(v) \in \mathcal{O}$ .

□

#### Corollaire 4.2.9

Soit  $\Lambda$  un réseau de  $V$  tel que  $\Lambda = \tilde{\Lambda}^*$  pour un certain réseau  $\tilde{\Lambda}$  de  $V^*$ . Soit un entier  $\ell \geq 1$ , on a alors pour tout entier  $i \geq 0$ ,  $(F_i^\ell \tilde{\Lambda})^* = F_{-i}^\ell \Lambda$ .

**Démonstration.** On procède par récurrence sur  $i \geq 0$ . Pour  $i = 0$ , c'est l'hypothèse. Supposons la propriété vraie pour  $i \geq 0$  et montrons qu'elle est vraie pour  $i + 1$ . Il suffit d'appliquer la proposition précédente à  $F_i^\ell \tilde{\Lambda}$ . On a alors  $(F_{i+1}^\ell \tilde{\Lambda})^* = F_{-1}^\ell (F_i^\ell \tilde{\Lambda})^*$  et ce dernier est égal à  $F_{-1}^\ell F_{-i}^\ell \Lambda = F_{-i-1}^\ell \Lambda$  par hypothèse de récurrence.

□

**Remarque 4.2.10**

Dans la situation présente où  $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[x]]$ , l'hypothèse du corollaire est trivialement vérifiée puisque tous les réseaux sont libres. On voit de plus que le critère de Levelt découle immédiatement de celui de Gérard et Levelt en vertu de la dualité entre les deux constructions.

Si l'on applique l'algorithme **Levelt+** au système différentiel (4.1), on applique en même temps l'algorithme **Levelt-** au système différentiel dual

$$\frac{dY}{dx} = -{}^tAY.$$

Cela résulte immédiatement de ce qui précède (Corollaire 4.2.9). On peut le voir également en regardant les opérations effectuées lorsqu'on applique l'algorithme **Levelt+**, où l'on fait des opérations sur les lignes comme indiqué à la remarque 4.2.5. En transposant et multipliant par  $-1$ , on obtient exactement les opérations sur les colonnes effectuées dans l'algorithme **Levelt-** appliqué au système dual. Plus précisément, la transformation de jauge  $Y = P \text{diag}(\frac{\mathbf{I}_r}{x}, \mathbf{I}_{m-r})W$  obtenue en appliquant **step+** au système (4.1) donne un système

$$\frac{dW}{dx} = BW. \tag{4.6}$$

Le système dual du système (4.6), à savoir,

$$\frac{dW}{dx} = -{}^tBW,$$

est alors équivalent au système dual du système (4.1). On l'obtient en appliquant au système dual de (4.1) la transformation de jauge

$$Y = {}^tQ \text{diag}(x\mathbf{I}_r, \mathbf{I}_{m-r})W,$$

où  $Q = P^{-1}$  est la matrice correspondant au pivot de Gauss sur les lignes de  $A_0$ . Cette transformation de jauge est exactement celle décrite dans **step-**.

### 4.3 Complexité des algorithmes de Moser et Levelt

Cette section succincte est motivée par la tentative d'adapter l'algorithme de Moser pour résoudre le problème du rang d'un système de Pfaff. Nous nous sommes aperçus que l'algorithme de Levelt, dont la description algorithmique est étonnamment ressemblante à celle de l'algorithme de Moser, s'adapte mieux à ce problème dans le cas  $n = 2$ . Il est donc naturel de se poser des questions de nature algorithmique concernant ces deux algorithmes. A notre connaissance, l'étude du coût de ces deux algorithmes ne semble jamais avoir été faite, bien qu'elle apparaisse évidente. Comme nous l'avons déjà mentionné, on peut voir l'algorithme de Levelt comme l'algorithme de Moser auquel on aurait supprimé le cas  $s = r$ . C'est précisément le cas  $s = r$  et la manière dont on se "ramène" au cas  $s < r$  qui pose problème pour appliquer l'algorithme de Moser dans le cas  $n = 2$ . Mentionnons que E. Corel a donné une description de l'algorithme de Moser en terme de réseaux, en vue de calculer les exposants de Levelt [25].

**Coût de l'algorithme de Moser** Nous donnons ici le coût au pire, en terme d'opérations sur le corps  $\mathbb{C}$ , de l'algorithme de Moser. On note  $N$  le nombre de coefficients connus ou précalculés dans le développement de  $A(x)$  vue comme série de Laurent en  $x$  à coefficients dans  $M_m(\mathbb{C})$ . D'après la description de l'algorithme qu'on en a donnée, une étape de réduction repose sur de l'algèbre linéaire (i.e. un pivot de Gauss) et la multiplication par une matrice diagonale. Par ailleurs, on doit calculer le polynôme  $\mathfrak{P}(\lambda)$  à chaque étape de réduction. Le coût d'une étape de réduction est donc en  $O(m^3 + Nm^\omega)$ . Le pire des cas se produit quand le système différentiel  $\frac{dY}{dx} = A(x)Y$  est singulier régulier en  $x = 0$  et qu'à chaque étape de réduction le rang de Moser diminue de  $1/m$ . Dans ce cas de figure, le nombre d'étapes de réduction est égal à  $p(m - 1)$  où  $p$  est le rang du système. En particulier, le nombre de coefficients  $N$  doit être supérieur ou égal à  $p(m - 1)$ . Il en résulte que le coût de l'algorithme de Moser est en  $O(Npm^{\omega+1})$ .

**Coût de l'algorithme de Levelt** De la même manière que pour l'algorithme de Moser, une étape de l'algorithme de Levelt nécessite de l'algèbre linéaire (i.e. un pivot de Gauss) et la multiplication par une matrice diagonale (l'étape est le calcul de la transformation de jauge  $Y = P \text{diag}(x\mathbf{I}_r, \mathbf{I}_{m-r})Z$  et du système obtenu après cette transformation). En reprenant les notations précédentes, on en déduit que le coût d'une étape de l'algorithme de Levelt est en  $O(m^3 + Nm^{\omega+1})$ . Par ailleurs le pire des cas se produit quand le système considéré est singulier régulier en  $x = 0$  et qu'il faut systématiquement  $m - 1$  étapes pour réduire seulement d'une unité le rang du système. Dans ce cas de figure, le nombre d'étapes dans l'algorithme de Levelt est donc égal à  $p(m - 1)$ . D'où le coût de l'algorithme en  $O(Npm^{\omega+1})$ .

### 4.3. Complexité des algorithmes de Moser et Levelt

---

Pour conclure, une étude de la complexité en moyenne des deux algorithmes semble mieux appropriée pour faire une comparaison entre les deux algorithmes. Ce qui nécessite de faire une étude expérimentale poussée de ces deux algorithmes.



# Chapitre 5

## Réduction de rang : cas $n = 2$

Dans ce chapitre, nous posons et résolvons le problème de la réduction du rang d'un système de Pfaff complètement intégrable à croisements normaux

$$\begin{cases} x^{p+1} \frac{\partial Y}{\partial x} = A(x, y)Y \\ y^{q+1} \frac{\partial Y}{\partial y} = B(x, y)Y \end{cases} \quad (5.1)$$

où  $A(x, y), B(x, y)$  appartiennent à  $M_m(\mathbb{C}[[x, y]])$  et  $p, q$  sont des entiers naturels.

Par définition le rang du système (5.1) est le couple  $(p, q)$ . Le problème de réduction du rang du système (5.1) consiste à trouver, s'il en existe, une transformation de jauge  $Y = TZ$  avec  $T \in GL_m(\mathbb{C}((x, y)))$  de telle sorte que le système obtenu soit un système complètement intégrable à croisements normaux

$$\begin{cases} x^{\tilde{p}+1} \frac{\partial Y}{\partial x} = \tilde{A}(x, y)Y \\ y^{\tilde{q}+1} \frac{\partial Y}{\partial y} = \tilde{B}(x, y)Y \end{cases} \quad (5.2)$$

avec  $\tilde{A}(x, y), \tilde{B}(x, y) \in M_m(\mathbb{C}[[x, y]])$  et  $\tilde{p}, \tilde{q}$  des entiers tels que

$$(\tilde{p}, \tilde{q}) \prec (p, q)$$

Une question sous-jacente est le problème de la régularité du système de Pfaff (5.1). Par définition, un système de Pfaff (5.1) est dit à **singularité régulière** en  $xy = 0$ , ou plus simplement **singulier régulier**, s'il existe une transformation de jauge  $Y = TZ$  avec  $T \in GL_m(\mathbb{C}((x, y)))$  telle que le système obtenu soit un système de Pfaff de première espèce, à savoir de la forme

$$\begin{cases} x \frac{\partial Y}{\partial x} = \tilde{A}(x, y)Y \\ y \frac{\partial Y}{\partial y} = \tilde{B}(x, y)Y \end{cases}$$

avec  $\tilde{A}(x, y), \tilde{B}(x, y) \in M_m(\mathbb{C}[[x, y]])$ .

En vertu d'un critère dû à Deligne [27] et van den Essen [29], que nous rappelons à la section 5.1.3, la question de la régularité du système de Pfaff (5.1) est équivalente à la question de la régularité des systèmes

$$x^{p+1} \frac{\partial Y}{\partial x} = A(x, y)Y \text{ et } y^{q+1} \frac{\partial Y}{\partial y} = B(x, y)Y$$

vus comme systèmes différentiels ordinaires en  $x$  et  $y$  respectivement.

Autrement dit, il suffit de répondre aux deux questions suivantes.

1. Existe-t-il une transformation de jauge  $Y = T_1 Z$  avec  $T_1 \in GL_m(\mathbb{C}((y))((x)))$  telle que le système différentiel ordinaire

$$x^{p+1} \frac{\partial Y}{\partial x} = A(x, y)Y$$

soit équivalent à un système différentiel ordinaire de première espèce

$$x \frac{\partial Z}{\partial x} = \tilde{A}(x, y)Z$$

avec  $\tilde{A}(x, y) \in M_m(\mathbb{C}[[x]]((y)))$  ?

2. Existe-t-il une transformation de jauge  $Y = T_2 Z$  avec  $T_2 \in GL_m(\mathbb{C}((x))((y)))$  telle que le système différentiel ordinaire

$$y^{q+1} \frac{\partial Y}{\partial y} = B(x, y)Y$$

soit équivalent à un système différentiel ordinaire de première espèce

$$y \frac{\partial Z}{\partial y} = \tilde{B}(x, y)Z$$

avec  $\tilde{B}(x, y) \in M_m(\mathbb{C}((x))[[y]])$  ?

Le système de Pfaff complètement intégrable (5.1) est singulier régulier si la réponse est positive aux questions 1) et 2). Les questions 1) et 2) se résolvent en utilisant par exemple, les méthodes de réduction de rang vues au chapitre précédent. Nous attirons l'attention sur le fait que ce critère ne donne en aucun cas d'indication sur la manière d'obtenir une transformation  $Y = TZ$  avec  $T \in GL_m(\mathbb{C}((x, y)))$  permettant d'obtenir un système de première espèce.

Il n'empêche, cela conduit naturellement à l'idée suivante pour déterminer une telle transformation  $Y = TZ$ , que cela soit pour se ramener à un système de Pfaff de première espèce ou plus généralement, pour réduire le rang du système de Pfaff complètement intégrable (5.1). L'idée consiste à réduire dans un premier temps le rang du système

$$x^{p+1} \frac{\partial Y}{\partial x} = A(x, y)Y$$



---

vu comme système différentiel ordinaire en  $x$ . On applique alors la transformation de jauge  $Y = T_1 Z$  obtenue au système de Pfaff (5.1).

Malheureusement, l'exemple qui suit, déjà mentionné dans [11], montre que le choix de la transformation  $Y = T_1 Z$  n'est pas anodin et que l'on doit prendre certaines précautions pour que le système obtenu reste dans la classe des systèmes de Pfaff complètement intégrables à croisements normaux. Notre contribution est d'avoir adapté l'algorithme de Levelt présenté au chapitre précédent pour calculer une transformation de jauge  $Y = T_1 Z$  convenable.

### Exemple 5.0.1

Considérons le système de Pfaff complètement intégrable

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{x^3+y}{x^4} & \frac{y^2}{x^4} \\ \frac{-1}{x^4} & \frac{-y+x^3}{x^4} \end{pmatrix} Y \\ \frac{\partial Y}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & 1 \\ \frac{-2}{y^2} & \frac{-3}{y} \end{pmatrix} Y \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Dans cet exemple, on a  $p = 3$  et  $q = 1$ .

En appliquant la transformation de jauge

$$Y = \begin{pmatrix} x^3 & -y^2 \\ 0 & y \end{pmatrix} Z \quad (5.4)$$

au premier système du système de Pfaff (5.3), on obtient le système différentiel de première espèce

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{x} & 0 \\ \frac{-1}{xy} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} Z. \quad (5.5)$$

Cela signifie donc que le système différentiel en  $x$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{x^3+y}{x^4} & \frac{y^2}{x^4} \\ \frac{-1}{x^4} & \frac{-y+x^3}{x^4} \end{pmatrix} Y$$

est singulier régulier en  $x = 0$  : la réponse à la question 1) du critère de Deligne-van den Essen est donc positive. Mais le système (5.5) obtenu après la transformation de jauge (5.4) n'est plus un système à croisements normaux, puisque  $y$  apparaît au dénominateur.

Par ailleurs, en appliquant la même transformation (5.4) au second système, on trouve le système différentiel en  $y$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \begin{pmatrix} -1/y & 0 \\ -2x^3/y^3 & -2/y \end{pmatrix} Z,$$

dont le rang est 2 et non plus 1 : il a augmenté.

En appliquant la transformation de jauge

$$Y = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z$$

au second système du système de Pfaff (5.3), on obtient le système différentiel en  $y$  de première espèce

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 & 1/y \\ -2/y & -3/y \end{pmatrix} Z.$$

Cela signifie donc que le système différentiel en  $y$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & 1 \\ \frac{-2}{y^2} & \frac{-3}{y} \end{pmatrix} Y$$

est singulier régulier en  $y = 0$  : la réponse à la question 2) du critère de Deligne-van den Essen est donc positive.

D'après ce critère, le système de Pfaff (5.3) est donc équivalent à un système de Pfaff de première espèce. Autrement dit, il existe une transformation de jauge  $Y = TZ$  avec  $T \in GL_m(\mathbb{C}((x, y)))$  telle que le système obtenu soit de rang  $(0, 0)$ . Il s'agit donc de trouver une telle transformation de jauge  $Y = TZ$ .

Voyons comment procéder sans rentrer dans les détails. Dans l'exemple considéré (5.3), la transformation de jauge

$$Y = \begin{pmatrix} x^4 & -yx \\ 0 & x \end{pmatrix} Z$$

conduit au système de Pfaff à croisements normaux

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial x} = \begin{pmatrix} -3/x & 0 \\ -1/x & 0 \end{pmatrix} Z \\ \frac{\partial Z}{\partial y} = \begin{pmatrix} -1/y & 0 \\ -2x^3/y^2 & -1/y \end{pmatrix} Z \end{cases}$$

On s'aperçoit que le rang de ce nouveau système est  $(\tilde{p}, \tilde{q}) = (0, 1)$ . On a donc réduit  $p$  au minimum sans augmenter  $q$ , qui est resté inchangé. C'est précisément une telle transformation de jauge qu'on cherche à construire.

On souhaite maintenant déterminer une transformation de jauge qui réduise  $\tilde{q}$  au minimum, sans augmenter  $\tilde{p}$ . Pour cela, il suffit d'appliquer à ce dernier système la transformation de jauge

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & y^2 \\ y & 0 \end{pmatrix} W.$$

On trouve un système de Pfaff de première espèce équivalent au système de Pfaff (5.3)

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & -y/x \\ 0 & -3/x \end{pmatrix} W \\ \frac{\partial W}{\partial y} = \begin{pmatrix} -4/y & -2/y \\ 1/y & -1/y \end{pmatrix} W \end{cases}$$

Nous montrons dans ce chapitre comment adapter la version descendante de l'algorithme de Levelt pour obtenir une transformation de jauge  $Y = TZ$  qui conduit à un système de Pfaff à croisements normaux (5.2) de telle sorte que  $\tilde{p}$  est minimal et  $\tilde{q} \leq q$ . Plus précisément  $\tilde{p}$  est égal au rang de Poincaré du système différentiel en  $x$

$$x^{p+1} \frac{\partial Y}{\partial x} = A(x, y)Y.$$

Au paragraphe 5.1, nous rappelons plusieurs caractérisations des systèmes de Pfaff singuliers réguliers, dont le critère de Deligne-van den Essen. Nous suivons l'exposé donné dans [29]. Les résultats sont énoncés pour  $n$  arbitraire.

Au paragraphe 5.2, nous donnons les constructions de réseaux sous-jacents à l'algorithme de réduction de rang vu ultérieurement. Nous donnons volontairement les constructions pour  $n$  arbitraire, en vue d'une éventuelle généralisation de l'algorithme de réduction de rang présenté ici pour le cas  $n = 2$ . Nous énonçons un critère important pour la suite, concernant la stationnarité des réseaux construits (Théorème 5.2.10). La démonstration de ce critère utilise de façon essentielle la **réflexivité** (voir Définition 5.2.5) des réseaux construits. Ce critère nous permet d'obtenir une nouvelle caractérisation des systèmes de Pfaff singuliers réguliers (Théorème 5.2.15). Ce critère implique également un résultat de réduction complète dans le cas  $n = 2$  et l'obtention d'un invariant pour le système (5.1) (Théorème 5.2.17).

Au paragraphe 5.3 nous décrivons l'algorithme de réduction de rang à proprement parler. Nous verrons que la réduction de rang dans le cas  $n = 2$  repose sur l'existence d'une forme de Smith d'une matrice de taille  $m \times m$  à coefficients dans l'anneau principal  $\mathbb{C}[[y]]$ . Ce qui explique la restriction au cas  $n = 2$ .

## 5.1 Systèmes à singularité régulière

Considérons un système de Pfaff complètement intégrable à croisements normaux en  $x_1 \cdots x_n = 0$  de rang  $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$  :

$$\begin{cases} x_1^{p_1+1} \frac{\partial Y}{\partial x_1} = A^{(1)}Y \\ \vdots \\ x_n^{p_n+1} \frac{\partial Y}{\partial x_n} = A^{(n)}Y \end{cases} \quad (5.6)$$

où les matrices  $A^{(i)} \in M_m(\mathcal{O}_n)$ .

### Définition 5.1.1

On dit que le système (5.6) est **singulier régulier en**  $x_1 \cdots x_n = 0$  ou plus simplement **singulier régulier**, s'il est équivalent à un système de Pfaff de première espèce par une transformation de jauge  $Y = TZ$  avec  $T \in GL_m(K_n)$ .

Supposons le système de Pfaff (5.6) singulier régulier. Par définition, il existe donc une transformation de jauge  $Y = TZ$  avec  $T \in GL_m(K_n)$  telle que le système de Pfaff obtenu s'écrive

$$\begin{cases} x_1 \frac{\partial Z}{\partial x_1} = B^{(1)}Z \\ \vdots \\ x_n \frac{\partial Z}{\partial x_n} = B^{(n)}Z \end{cases}$$

avec les matrices  $B^{(i)}$  appartenant à  $M_m(\mathcal{O}_n)$ .

### 5.1.1 Matrice fondamentale de solutions formelles

Nous avons vu au chapitre 3 qu'un système de Pfaff de première espèce possédait une matrice fondamentale de solutions de la forme

$$P(x)x_1^{B^{(1)}} \cdots x_n^{B^{(n)}}$$

où  $P(x) \in M_m(\mathcal{O}_n)$  avec  $\det(P(x)) \neq 0$  et les matrices  $B^{(i)}$  appartiennent à  $M_m(\mathbb{C})$  et commutent deux à deux.

Il en résulte qu'un système de Pfaff complètement intégrable singulier régulier (5.6) possède une matrice fondamentale de solutions de la forme

$$S(x)x_1^{B^{(1)}} \cdots x_n^{B^{(n)}},$$

où  $S(x) \in GL_m(K_n)$  et les matrices  $B^{(i)}$  ont les mêmes propriétés que ci-dessus. Cela caractérise en fait les systèmes de Pfaff complètement intégrables à croisements normaux *singuliers réguliers*.

### Théorème 5.1.2

Un système de Pfaff complètement intégrable à croisements normaux

$$dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i^{p_i+1}} dx_i \right) Y,$$

où  $A^{(i)} \in M_m(\mathcal{O}_n)$  et  $p_i$  est un entier naturel pour  $1 \leq i \leq n$ , est singulier régulier si et seulement s'il possède une matrice fondamentale de solutions de la forme

$$S(x)x_1^{B^{(1)}} \cdots x_n^{B^{(n)}},$$

où  $S(x) \in GL_m(K_n)$  et les matrices  $B^{(i)}$  appartiennent à  $M_m(\mathbb{C})$  et commutent deux à deux.

On vient de voir que c'était une condition nécessaire. Pour montrer la réciproque, il suffit de constater que le système de Pfaff est équivalent par la transformation de jauge  $Y = S(x)Z$  au système de Pfaff de première espèce "constant"

$$dZ = \left( \sum_{i=1}^n \frac{B^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Z.$$

**Remarque 5.1.3**

Au paragraphe 5.1.3, on montre qu'un système de Pfaff complètement intégrable (5.6) singulier régulier peut se ramener à un système de Pfaff de première espèce par une transformation de jauge  $Y = S(x)Z$  où  $S(x) \in M_m(\mathcal{O}_n)$  avec  $\det(S(x)) \neq 0$ . Par conséquent, un système de Pfaff complètement intégrable (5.6) est singulier régulier si et seulement s'il possède une matrice fondamentale de solutions de la forme

$$S(x)x_1^{B^{(1)}} \dots x_n^{B^{(n)}}$$

où  $S(x) \in M_m(\mathcal{O}_n)$  avec  $\det(S(x)) \neq 0$  et les matrices  $B^{(i)}$  appartiennent à  $M_m(\mathbb{C})$  et commutent deux à deux.

**5.1.2 Existence d'un réseau invariant**

Par définition, un système de Pfaff complètement intégrable (5.6) *singulier régulier* est équivalent à un système de Pfaff de première espèce par une transformation de jauge  $Y = TZ$  avec  $T \in GL_m(K_n)$ . Soit  $\Lambda$  le réseau engendré par les vecteurs colonnes  $f_i$  de la matrice  $T$ . Le réseau  $\Lambda$  est donc un réseau libre. De plus, le réseau  $\Lambda$  est invariant par les opérateurs  $\Delta_{i,1}$ , c'est-à-dire

$$\Delta_{i,1}(\Lambda) \subseteq \Lambda, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Par conséquent, si le système de Pfaff complètement intégrable (5.6) est singulier régulier, il existe un réseau  $\Lambda$  invariant par les opérateurs  $\Delta_{i,1}$ .

Réciproquement, s'il existe un réseau  $\Lambda$  invariant par les opérateurs  $\Delta_{i,1}$ , le système de Pfaff (5.6) est singulier régulier. Cela résulte du Théorème 3.3.16. On a donc la caractérisation suivante d'un système de Pfaff complètement intégrable à croisements normaux *singulier régulier*.

**Théorème 5.1.4 ([33])**

Un système de Pfaff complètement intégrable à croisements normaux

$$dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i^{p_i+1}} dx_i \right) Y,$$

est singulier régulier si et seulement s'il existe un réseau  $\Lambda$  invariant par les opérateurs  $\Delta_{i,1}$  où  $\Delta_{i,1}$  est le  $x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ -opérateur différentiel

$$x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{A^{(i)}}{x_i^{p_i}}.$$

Le résultat énoncé ci-dessus n'est pas une simple traduction de la définition d'un système de Pfaff complètement intégrable à croisements normaux *singulier régulier* dans le langage des réseaux : le réseau  $\Lambda$  n'est pas supposé libre, contrairement à ce qu'impose la définition.

### Remarque 5.1.5

On peut supposer que le réseau  $\Lambda$  est contenu dans  $\mathcal{O}_n^m$  en vertu du critère de van den Essen.

### 5.1.3 Critère de van den Essen

Nous rappelons ici le critère de Deligne-van den Essen en suivant l'exposition de [29]. La démonstration de ce critère par A. van den Essen repose sur le théorème de Gérard et Levelt caractérisant la régularité en terme d'existence d'un réseau invariant et sur un argument de nature "local-global".

Nous reprenons les notations se trouvant dans [29]. Pour simplifier les notations, on pose  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_n$  et  $K = K_n$ . Pour  $1 \leq i \leq n$ , on note  $\mathcal{O}_{(i)}$  l'anneau  $\mathbb{C}((x_i))[[x_i]]$ , et  $K_{(i)}$  son corps des fractions, c'est-à-dire le corps  $\mathbb{C}((x_i))((x_i))$ .

Rappelons que  $\Delta_i$  est le  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ -opérateur différentiel égal à  $\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{A^{(i)}}{x_i^{p_i+1}}$ . Étant donné un entier naturel  $k_i$ , on pose  $\Delta_{i,k_i} = x_i^{k_i} \Delta_i$ .

Soit  $\Lambda$  un  $\mathcal{O}$ -réseau libre du  $K$ -espace vectoriel  $V = K^m$  que l'on suppose invariant par les opérateurs  $\Delta_{i,p_i+1}$  : on peut prendre par exemple  $\Lambda = \mathcal{O}^m$ . On note  $\mathcal{O}_x$  l'anneau  $S^{-1}\mathcal{O}$  où  $S$  est la partie multiplicative formée des puissances de  $x$  :  $S = \{x^\alpha; \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ . De la même façon, on note  $\Lambda_x$  le  $\mathcal{O}_x$ -module libre  $S^{-1}\Lambda$ . Par construction, le module  $\Lambda_x$  est invariant par les opérateurs  $\Delta_i$  et à fortiori invariant par les opérateurs  $\Delta_{i,1}$ . Pour chaque  $1 \leq i \leq n$ , l'opérateur  $\Delta_i$  s'étend de manière unique en un  $\frac{d}{dx_i}$ -opérateur différentiel  $\Delta_{(i)}$  agissant sur le  $K_{(i)}$ -espace vectoriel  $V_{(i)} = K_{(i)} \otimes_{\mathcal{O}_x} \Lambda_x$ .

En suivant la terminologie de [29], on dit que l'opérateur  $\Delta_i$  est **régulier relativement à  $x_i$**  si le  $\frac{d}{dx_i}$ -opérateur différentiel  $\Delta_{(i)}$  est 1-régulier au sens du chapitre précédent.

### Théorème 5.1.6 ([29])

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) le système de Pfaff complètement intégrable (5.6) est singulier régulier ;
- (ii) il existe un  $\mathcal{O}$ -réseau  $\Lambda' \subseteq \Lambda_x$ , avec  $\Lambda'_x = \Lambda_x$ , vérifiant  $\Delta_{i,1}\Lambda' \subseteq \Lambda'$  pour  $1 \leq i \leq n$  ;
- (iii) étant donné un  $\mathcal{O}$ -réseau  $\Lambda' \subseteq \Lambda_x$  avec  $\Lambda'_x = \Lambda_x$ , la chaîne croissante de réseaux

$$\Lambda' \subseteq \Lambda' + \Delta_{i,1}\Lambda' \subseteq \cdots \subseteq \Lambda' + \cdots + (\Delta_{i,1})^j\Lambda' \subseteq \cdots$$

est stationnaire pour chaque  $1 \leq i \leq n$  ;

(iv) étant donné  $v \in \Lambda_x$ , la chaîne de  $\mathcal{O}$ -modules

$$\mathcal{O}v \subseteq \mathcal{O}v + \mathcal{O}\Delta_{i,1}v \subseteq \dots \subseteq \mathcal{O}v + \dots + \mathcal{O}(\Delta_{i,1})^jv \subseteq \dots$$

est stationnaire pour chaque  $1 \leq i \leq n$  ;

(v) pour chaque  $1 \leq i \leq n$ , l'opérateur  $\Delta_i$  est régulier relativement à  $x_i$ .

L'équivalence entre (i) et (ii) résulte du théorème précédent. La chaîne de réseaux dans (iii) est précisément celle donnée par R. Gérard et A.H.M. Levelt dans le cas ordinaire (cas  $n = 1$ ). Nous avons vu au chapitre précédent que dans ce cas, cette chaîne de réseaux stationne à partir de  $j = m - 1$ . Dans le cas général, on sait tout au plus que cette chaîne stationne. Nous remplacerons ultérieurement la condition (iii) par une autre condition où l'on construit une chaîne décroissante de réseaux qui stationne à partir de  $j = m - 1$  (Théorème 5.2.15).

L'équivalence entre (i) et (v) permet de décider de la régularité du système de Pfaff (5.6) en vérifiant si chacun des opérateurs  $\Delta_{(i)}$  est singulier régulier. Ce que l'on peut vérifier en appliquant l'un des algorithmes vus au chapitre précédent.

### Remarque 5.1.7

D'après le critère de Deligne-van den Essen, on peut donner une définition équivalente à la Définition 5.1.1 d'un système de Pfaff complètement intégrable à croisements normaux singulier régulier. La définition équivalente est de dire que le système de Pfaff complètement intégrable (5.6) est **singulier régulier** s'il existe une transformation de jauge  $Y = TZ$  avec  $T \in M_m(\mathcal{O}_x)$ ,  $\det(T) \neq 0$  telle que le système obtenu soit un système de Pfaff de première espèce.

Remarquons qu'on peut même supposer  $T \in M_m(\mathcal{O})$ , quitte à remplacer  $T$  par  $x^\alpha T$  avec  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  de telle sorte que  $x^\alpha T \in M_m(\mathcal{O})$ .

## 5.2 Construction des réseaux

Supposons s'être donné un réseau libre  $\Lambda$  invariant par les opérateurs  $\Delta_{i,p_i+1}$  : nous interprétons le système de Pfaff (5.6) en terme de réseau libre invariant. Le but est de réduire le rang du système (5.6), ce qui revient à trouver un réseau libre  $\Lambda'$  invariant par les opérateurs  $\Delta_{i,p'_i+1}$  où  $(p'_1, \dots, p'_n) \prec (p_1, \dots, p_n)$ .

L'idée est de reprendre les deux constructions de réseaux vues au chapitre précédent en utilisant l'opérateur  $\Delta_1$  en vue de réduire  $p_1$ , sans augmenter  $p_2, \dots, p_n$ . Une fois cela fait, nous remplaçons  $\Delta_1$  dans les constructions par  $\Delta_2$ , etc... Néanmoins les réseaux construits n'ont aucune raison d'être libres : ils sont au mieux réflexifs.

### 5.2.1 Saturation

Soit  $\Lambda$  un réseau de  $V = K_n^m$ . Étant donné  $\ell \geq 1$ , on note

$$F_1^{1,\ell}\Lambda = \Lambda + \Delta_{1,\ell}\Lambda.$$

#### Proposition 5.2.1

Soit  $\Lambda$  un réseau de  $V$ . L'ensemble  $F_1^{1,\ell}\Lambda$  est un réseau de  $V$ . De plus, si  $\Lambda$  est invariant par les opérateurs  $\Delta_{i,p_i+1}$  pour  $1 \leq i \leq n$ , il en va de même de  $F_1^{1,\ell}\Lambda$ .

La démonstration que  $F_1^{1,\ell}\Lambda$  est un réseau de  $V$  est en tout point identique à celle du cas ordinaire [32]. Quant à l'invariance du réseau  $F_1^{1,\ell}\Lambda$  par les opérateurs  $\Delta_{i,p_i+1}$ , cela résulte de la commutativité des opérateurs  $\Delta_{i,p_i+1}$  avec l'opérateur  $\Delta_{1,\ell}$ .

On construit par récurrence sur  $i \geq 0$ , la chaîne croissante de réseaux  $(F_i^{1,\ell}\Lambda)_i$  par :

$$\begin{cases} F_0^{1,\ell}\Lambda = \Lambda \\ F_{i+1}^{1,\ell}\Lambda = F_1^{1,\ell}F_i^{1,\ell}\Lambda, \text{ pour } i \geq 0. \end{cases}$$

Remarquons que le réseau  $F_i^{1,\ell}\Lambda$  est égal à  $\Lambda + \Delta_{1,\ell}\Lambda + \dots + (\Delta_{1,\ell})^i\Lambda$ .

#### Remarque 5.2.2

De la même façon, on définit pour chaque opérateur  $\Delta_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , une suite de réseaux  $(F_j^{i,\ell}\Lambda)_{j \geq 0}$ .

### 5.2.2 Contraction

Soit  $\Lambda$  un réseau de  $V = K_n^m$  invariant par l'opérateur  $\Delta_{1,p_1+1}$ , c'est-à-dire :

$$\Delta_{1,p_1+1}(\Lambda) \subseteq \Lambda.$$

Étant donné  $\ell \geq 1$ , on note

$$F_{-1}^{1,\ell}\Lambda = \{v \in \Lambda : \Delta_{1,\ell}(v) \in \Lambda\}.$$

#### Proposition 5.2.3

Soit  $\Lambda$  un réseau de  $V$  invariant par l'opérateur  $\Delta_{1,p_1+1}$ . L'ensemble  $F_{-1}^{1,\ell}\Lambda$  est un réseau de  $V$ . De plus si  $\Lambda$  est invariant par les opérateurs  $\Delta_{i,p_i+1}$  pour  $1 \leq i \leq n$ , il en va de même de  $F_{-1}^{1,\ell}\Lambda$ .

**Démonstration.** On vérifie que  $F_{-1}^{1,\ell}\Lambda$  est un  $\mathcal{O}_n$ -module en appliquant la règle de Leibniz. C'est bien un  $\mathcal{O}_n$ -module de type fini, puisqu'il est contenu dans  $\Lambda$ . Pour voir que  $F_{-1}^{1,\ell}\Lambda$  engendre  $V$  comme  $K_n$ -espace vectoriel, il suffit de remarquer que le  $\mathcal{O}_n$ -module  $F_{-1}^{1,\ell}\Lambda$  contient le réseau  $x_1^{p_1+1}\Lambda$ . Concernant l'invariance de  $F_{-1}^{1,\ell}\Lambda$  par les opérateurs  $\Delta_{i,p_i+1}$ , elle résulte de la commutativité des opérateurs  $\Delta_{i,p_i+1}$  avec l'opérateur  $\Delta_{1,\ell}$ .

□



On définit par récurrence sur  $i \geq 0$  la chaîne décroissante de réseaux  $(F_{-i}^{1,\ell}\Lambda)_i$  par :

$$\begin{cases} F_0^{1,\ell}\Lambda = \Lambda \\ F_{-(i+1)}^{1,\ell}\Lambda = F_{-1}^{1,\ell}F_{-i}^{1,\ell}\Lambda, \text{ pour } i \geq 0. \end{cases}$$

**Remarque 5.2.4**

De la même façon, on définit pour chaque opérateur  $\Delta_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , une suite de réseaux  $(F_{-j}^{i,\ell}\Lambda)_{j \geq 0}$ . Cela suppose que  $\Lambda$  est invariant par l'opérateur  $\Delta_{i,p_i+1}$ .

**5.2.3 Réflexivité des contractés**

Soit  $\Lambda$  un réseau de  $V$ . On rappelle que le réseau dual noté  $\Lambda^*$  est le  $\mathcal{O}_n$ -module  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_n}(\Lambda, \mathcal{O}_n)$  et qu'il s'identifie à un réseau de  $V^*$ . On identifie  $V$  à son bidual  $V^{**}$ . Le  $\mathcal{O}_n$ -module  $\Lambda^{**}$  est donc un réseau de  $V$  et il contient le réseau  $\Lambda$ .

**Définition 5.2.5**

Le réseau  $\Lambda$  est **réflexif** si  $\Lambda = \Lambda^{**}$ .

Par exemple, tout réseau libre  $\Lambda$  de  $V$  est un réseau réflexif. De même, le dual d'un réseau est réflexif.

**Proposition 5.2.6**

Soit  $\Lambda$  un réseau invariant par l'opérateur  $\Delta_{1,p_1+1}$ . Si le réseau  $\Lambda$  est réflexif, alors les réseaux  $F_{-i}^{1,\ell}\Lambda$  sont réflexifs pour  $\ell \geq 1$  et  $i \geq 0$ .

**Démonstration.** Cela résulte immédiatement du Corollaire 4.2.9.

□

**5.2.4 Condition de stationnarité des constructions**

A. van den Essen et A.H.M. Levelt [30] ont établi la stationnarité de la suite  $(F_i^{1,\ell}\Lambda)_{i \geq 0}$  sous la condition que l'opérateur  $\Delta_{(1)}$  est  $\ell$ -régulier. Leur démonstration consiste à utiliser un argument de nature locale-globale [17, §4, théorème 3] pour montrer que  $\sum_{j=0}^{+\infty} (\Delta_{1,\ell})^j \Lambda$  est un réseau. On a donc la condition suivante de stationnarité de la chaîne croissante de réseaux  $(F_i^{1,\ell}\Lambda)_{i \geq 0}$ .

**Proposition 5.2.7 ([30])**

Soit  $\Lambda$  un réseau de  $V$  invariant par les opérateurs  $\Delta_{i,p_i+1}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) l'opérateur différentiel  $\Delta_{(1)}$  est  $\ell$ -régulier ;

(ii) la chaîne croissante de réseaux

$$\Lambda \subseteq \Lambda + \Delta_{1,\ell}\Lambda \subseteq \cdots \subseteq \Lambda + \Delta_{1,\ell}\Lambda + \cdots + (\Delta_{1,\ell})^i\Lambda \subseteq \cdots$$

est stationnaire.

Contrairement au cas  $n = 1$ , on ne sait pas dire à partir de quand la suite de réseaux est stationnaire.

Dans ce qui suit, nous allons établir la stationnarité de la chaîne décroissante de réseaux  $(F_{-i}^{1,\ell}\Lambda)_{i \geq 0}$  en utilisant une caractérisation des réseaux réflexifs de nature locale-globale. On note  $\mathcal{P}$  l'ensemble des idéaux premiers principaux de l'anneau  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_n$ . Si  $(f) \in \mathcal{P}$ , on note  $\mathcal{O}_{(f)}$  le localisé de  $\mathcal{O}$  par l'idéal premier  $(f)$ , le corps des fractions de  $\mathcal{O}_{(f)}$  étant  $K = K_n$ . Si  $M$  est un  $\mathcal{O}$ -réseau de  $V$ , on note  $M_{(f)}$  le  $\mathcal{O}_{(f)}$ -réseau  $\mathcal{O}_{(f)} \otimes_{\mathcal{O}} M$  ( $= \mathcal{O}_{(f)}$ -module de type fini qui engendre  $V$  comme  $K$ -espace vectoriel).

**Théorème 5.2.8** ([17, §4, théorème 2])

Soit  $M$  un  $\mathcal{O}$ -réseau de  $V$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) le réseau  $M$  est réflexif;
- (ii)  $M = \bigcap_{(f) \in \mathcal{P}} M_{(f)}$ .

**Lemme 5.2.9**

Soit  $\Lambda$  un  $\mathcal{O}$ -réseau de  $V$  invariant par  $\Delta_{1,p_1+1}$ . Soit  $(f) \in \mathcal{P}$  avec  $(f) \neq (x_1)$ . On a alors pour tout  $\ell \geq 1$  et tout  $i \geq 0$

$$\left( F_{-i}^{1,\ell}\Lambda \right)_{(f)} = \Lambda_{(f)}.$$

**Démonstration.** On a pour tout  $i \geq 0$

$$x_1^{i(p_1+1)}\Lambda \subseteq F_{-i}^{1,\ell}\Lambda \subseteq \Lambda.$$

Puisque  $(f) \neq (x_1)$ ,  $x_1$  est inversible dans  $\mathcal{O}_{(f)}$  et donc

$$\left( F_{-i}^{1,\ell}\Lambda \right)_{(f)} = \Lambda_{(f)}.$$

□

Il résulte de ce lemme et du théorème précédent que la chaîne décroissante de  $\mathcal{O}$ -réseaux  $(F_{-i}^{1,\ell}\Lambda)_{i \geq 0}$  est stationnaire si et seulement si la chaîne décroissante de  $\mathcal{O}_{(x_1)}$ -réseaux  $\left( (F_{-i}^{1,\ell}\Lambda)_{(x_1)} \right)_{i \geq 0}$  est stationnaire.

**Théorème 5.2.10**

Soit  $\Lambda$  un  $\mathcal{O}$ -réseau réflexif de  $V$  invariant par  $\Delta_{1,p_1+1}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i)  $\Delta_{(1)}$  est  $\ell$ -régulier ;

(ii) La chaîne décroissante de  $\mathcal{O}$ -réseaux  $(F_{-i}^{1,\ell}\Lambda)_{i \geq 0}$  est stationnaire.

Dans ces conditions, la suite  $(F_{-i}^{1,\ell}\Lambda)_{i \geq 0}$  est constante à partir de  $i = m - 1$ . Autrement dit

$$F_{-m+1}^{1,\ell}\Lambda = F_{-m}^{1,\ell}\Lambda = \dots$$

Pour établir ce résultat, nous allons donner une succession de résultats techniques. Mais avant cela, nous allons préciser quelques points concernant les résultats de Gérard et Levelt énoncés au chapitre précédent. Ceux-ci sont valables dans une situation plus générale que celle que nous avons décrite [32].

Soit  $A$  un anneau de valuation discrète d'uniformisante  $x$  muni d'une dérivation  $\delta$  vérifiant  $\delta(x) = 1$ , qu'on étend de manière unique en une dérivation sur le corps des fractions  $K$  de  $A$ . On a à l'esprit l'anneau  $A = \mathcal{O}_{(x_1)}$  muni de la valuation  $x_1$ -adique.

Soit  $V = K^m$  et  $\Delta$  un  $\delta$ -opérateur différentiel de  $V$ . On dira que l'opérateur  $\Delta$  est  $\ell$ -régulier, avec  $\ell \geq 1$ , s'il existe un  $A$ -réseau (nécessairement libre, puisque  $A$  est principal) invariant par l'opérateur  $\Delta_\ell = x^\ell \Delta$ . Les théorèmes 4.2.2 et 4.2.4 sont encore valables dans cette situation.

Dans ce qui suit, on dira donc que l'opérateur  $\Delta_1$  est  $\ell$ -**régulier** avec  $\ell \geq 1$  s'il existe un  $\mathcal{O}_{(x_1)}$ -réseau de  $V$  invariant par  $\Delta_{1,\ell} = x_1^\ell \Delta_1$ .

**Lemme 5.2.11**

Soit  $M$  un  $\mathcal{O}_{(x_1)}$ -réseau. On pose  $M_{(1)} = \mathcal{O}_{(1)} \otimes_{\mathcal{O}_{(x_1)}} M$ . Pour tout  $i \geq 0$ , on note

$$F_i^{1,\ell} M = M + \dots + (\Delta_{1,\ell})^i M$$

et

$$F_i^\ell M_{(1)} = M_{(1)} + \dots + (\Delta_{(1),\ell})^i M_{(1)}.$$

On a alors pour tous  $\ell \geq 0$  et  $i \geq 0$

$$\mathcal{O}_{(1)} \otimes_{\mathcal{O}_{(x_1)}} F_i^{1,\ell} M = F_i^\ell M_{(1)}.$$

**Démonstration.** Il suffit de montrer

$$\mathcal{O}_{(1)} \otimes_{\mathcal{O}_{(x_1)}} F_1^{1,\ell} M = F_1^\ell M_{(1)}.$$

Soient  $f \in \mathcal{O}_{(1)}$  et  $v \in M$ . Par définition,

$$\Delta_{(1),\ell}(f \otimes v) = x_1^\ell \frac{\partial f}{\partial x_1} \otimes v + f \otimes \Delta_{1,\ell}(v).$$

Il en résulte que

$$f \otimes \Delta_{1,\ell}(v) \in F_1^\ell M_{(1)},$$

d'où l'inclusion

$$\mathcal{O}_{(1)} \otimes_{\mathcal{O}_{(x_1)}} F_1^{1,\ell} M \subseteq F_1^\ell M_{(1)}.$$

Pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de montrer que pour  $w \in M_{(1)}$ ,  $\Delta_{(1),\ell}(w) \in \mathcal{O}_{(1)} \otimes_{\mathcal{O}_{(x_1)}} F_1^{1,\ell} M$ .

Or  $w = \sum f_i \otimes v_i$  avec  $f_i \in \mathcal{O}_{(1)}$  et  $v_i \in M$ . D'où

$$\Delta_{(1),\ell}(w) = \sum x_1^\ell \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \otimes v_i + f_i \otimes \Delta_{1,\ell}(v_i).$$

Ce qui établit l'appartenance de  $\Delta_{(1),\ell}(w)$  à  $\mathcal{O}_{(1)} \otimes_{\mathcal{O}_{(x_1)}} F_1^{1,\ell} M$  et l'inclusion inverse.

□

### Lemme 5.2.12

Soit  $(M_i)_{i \geq 0}$  une suite croissante de  $\mathcal{O}_{(x_1)}$ -réseaux. On pose

$$M_{(i)} = \mathcal{O}_{(1)} \otimes_{\mathcal{O}_{(x_1)}} M_i.$$

Il y a équivalence entre :

- (i)  $(M_i)_{i \geq 0}$  est stationnaire;
- (ii)  $(M_{(i)})_{i \geq 0}$  est stationnaire.

**Démonstration.** Il suffit de montrer que pour tout  $i \geq 0$ ,

$$\dim_{\mathbb{C}((x_2, \dots, x_n))} M_{(i+1)}/M_{(i)} = \dim_{\mathbb{C}((x_2, \dots, x_n))} M_{i+1}/M_i.$$

Or puisque  $\mathcal{O}_{(x_1)}$  est un anneau de valuation discrète, il existe une  $\mathcal{O}_{(x_1)}$ -base adaptée  $(b_1, \dots, b_m)$  du  $\mathcal{O}_{(x_1)}$ -réseau  $M_{i+1}$  et une suite d'entiers  $0 \leq e_1 \leq \dots \leq e_m$  tels que  $(x_1^{e_1} b_1, \dots, x_1^{e_m} b_m)$  soit une base du  $\mathcal{O}_{(x_1)}$ -réseau  $M_i$ .

Mais alors la famille  $(1 \otimes b_1, \dots, 1 \otimes b_m)$  est une  $\mathcal{O}_{(1)}$ -base de  $M_{(i+1)}$  et de même, la famille  $(x_1^{e_1} \otimes b_1, \dots, x_1^{e_m} \otimes b_m)$  est une  $\mathcal{O}_{(1)}$ -base de  $M_{(i)}$ .

Il en résulte l'égalité des dimensions annoncée.

□

### Corollaire 5.2.13

Soit un entier  $\ell \geq 1$ . Il y a équivalence entre :

- (i)  $\Delta_{(1)}$  est  $\ell$ -régulier;
- (ii)  $\Delta_1$  est  $\ell$ -régulier.

**Démonstration.** C'est une conséquence immédiate des deux lemmes précédents.

□

**Lemme 5.2.14**

Soit  $\Lambda$  un  $\mathcal{O}$ -réseau de  $V$ . On a alors pour tous  $\ell \geq 0$  et  $i \geq 0$

$$(F_{-i}^{1,\ell}\Lambda)_{(x_1)} = F_{-i}^{1,\ell}\Lambda_{(x_1)},$$

où  $F_{-i}^{1,\ell}\Lambda_{(x_1)}$  est défini par récurrence par  $F_0^{1,\ell}\Lambda_{(x_1)} = \Lambda_{(x_1)}$  et pour  $i \geq 0$ ,

$$F_{-(i+1)}^{1,\ell}\Lambda_{(x_1)} = \{v \in F_{-i}^{1,\ell}\Lambda_{(x_1)} : \Delta_{1,\ell}(v) \in F_{-i}^{1,\ell}\Lambda_{(x_1)}\}.$$

**Démonstration.** Il suffit de montrer l'égalité pour  $i = 1$ .

Soient  $f \in \mathcal{O}_{(x_1)}$  et  $v \in F_{-1}^{1,\ell}\Lambda$ . Par définition, on a  $fv \in \Lambda_{(x_1)}$ . De plus,

$$\Delta_{1,\ell}(fv) = x_1^\ell \frac{\partial f}{\partial x_1} v + f \Delta_{1,\ell}(v),$$

ce qui montre l'appartenance de  $\Delta_{1,\ell}(fv)$  à  $\Lambda_{(x_1)}$ . D'où l'inclusion

$$(F_{-1}^{1,\ell}\Lambda)_{(x_1)} \subseteq F_{-1}^{1,\ell}\Lambda_{(x_1)}.$$

Réciproquement si  $w$  est un élément de  $F_{-1}^{1,\ell}\Lambda_{(x_1)}$ , il est de la forme

$$w = \frac{v}{g}, \quad \text{où } v \in \Lambda \text{ et } g \in \mathcal{O} \setminus (x_1).$$

De plus il existe  $h \in \mathcal{O} \setminus (x_1)$  tel que

$$h\Delta_{1,\ell}(w) \in \Lambda.$$

On peut aisément vérifier que dans ce cas  $(gh)v \in F_{-1}^{1,\ell}\Lambda$ , et donc  $w$  appartient bien à  $(F_{-1}^{1,\ell}\Lambda)_{(x_1)}$ .

□

**Démonstration du Théorème 5.2.10.** D'après le Corollaire 5.2.13, on a l'équivalence entre la  $\ell$ -régularité de  $\Delta_{(1)}$  et celle de  $\Delta_1$ . Or d'après le Théorème 4.2.4, la  $\ell$ -régularité de  $\Delta_1$  est caractérisée par le fait que la chaîne de  $\mathcal{O}_{(x_1)}$ -réseaux  $(F_{-i}^{1,\ell}M)$ , où  $M$  est un  $\mathcal{O}_{(x_1)}$ -réseau, est stationnaire.

Par conséquent, au vu du lemme précédent,  $\Delta_1$  est  $\ell$ -régulier si et seulement si la chaîne de  $\mathcal{O}_{(x_1)}$ -réseaux  $((F_{-i}^{1,\ell}\Lambda)_{(x_1)})_{i \geq 0}$  est stationnaire.

Or cette condition caractérise la stationnarité de la suite de  $\mathcal{O}$ -réseaux réflexifs  $(F_{-i}^{1,\ell}\Lambda)_{i \geq 0}$ , d'après les considérations précédentes.

Par ailleurs, cette dernière suite stationne dès le rang  $i = m - 1$  puisque la suite  $((F_{-i}^{1,\ell}\Lambda)_{(x_1)})_{i \geq 0}$  stationne elle-même dès  $i = m - 1$ .

□

Nous déduisons du Théorème 5.2.10 une nouvelle caractérisation des systèmes singuliers réguliers.

**Théorème 5.2.15**

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) le système de Pfaff (5.6) est singulier régulier ;
- (ii) étant donné un réseau réflexif  $\Lambda$  vérifiant  $\Delta_{i,p_i+1}(\Lambda) \subseteq \Lambda$ ,  $1 \leq i \leq n$ , la suite décroissante de réseaux

$$\Lambda \supseteq F_{-1}^{i,1}\Lambda \supseteq \cdots \supseteq F_{-j}^{i,1}\Lambda \supseteq \cdots$$

est stationnaire pour  $1 \leq i \leq n$  ;

- (iii) pour chaque  $1 \leq i \leq n$ , l'opérateur  $\Delta_{(i)}$  est 1-régulier.

Dans ces conditions, pour chaque  $1 \leq i \leq n$ , la suite de réseaux  $(F_{-j}^{i,1}\Lambda)_j$  est stationnaire à partir de  $j = m - 1$ .

**Démonstration.** L'équivalence (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) résulte du Théorème 5.2.10 ; de même que le fait que la suite de réseaux  $(F_{-j}^{i,1}\Lambda)_j$  soit constante dès  $j = m - 1$ . L'implication (i)  $\Rightarrow$  (iii) est évidente. Il reste donc à montrer l'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i).

Soit  $\Lambda$  un réseau réflexif vérifiant les hypothèses de (ii). On construit une suite de réseaux  $\Lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  réflexifs avec  $\Lambda_i$  invariant par les opérateurs  $\Delta_{1,1}, \dots, \Delta_{i,1}$  et  $\Delta_{j,p_j+1}$  pour  $j \geq i + 1$ . On pose  $\Lambda_1 = F_{-m+1}^{1,1}\Lambda$ . Ce réseau est réflexif d'après la Proposition 5.2.6. Puisque la suite de réseaux  $(F_{-j}^{1,1}\Lambda)_j$  est constante à partir de  $j = m - 1$ , le réseau  $\Lambda_1$  est invariant par l'opérateur  $\Delta_{1,1}$  et par les opérateurs  $\Delta_{i,p_i+1}$  pour  $i \geq 2$ . En particulier le réseau  $\Lambda_1$  vérifie les hypothèses de (ii).

Supposons avoir construit le réseau  $\Lambda_i$  avec  $i < n$ . Celui-ci vérifie alors les hypothèses de (ii). On pose  $\Lambda_{i+1} = F_{-m+1}^{i+1,1}\Lambda_i$ . Le réseau  $\Lambda_{i+1}$  est réflexif et invariant par les opérateurs  $\Delta_{1,1}, \dots, \Delta_{i,1}$  et  $\Delta_{j,p_j+1}$  pour  $j \geq i+1$  puisque c'est le cas pour  $\Lambda_i$ . Comme la suite de réseaux  $(F_{-j}^{i+1,1}\Lambda_i)_j$  est constante à partir de  $j = m - 1$ , on en déduit que le réseau  $\Lambda_{i+1}$  est invariant par l'opérateur  $\Delta_{i+1,1}$ .

On obtient donc un réseau  $\Lambda_n$  invariant par les opérateurs  $\Delta_{i,1}$  pour  $1 \leq i \leq n$ . D'après le théorème de Gérard et Levelt (Théorème 5.1.4), ceci revient à dire que le système de Pfaff (5.6) est singulier régulier.

□

**5.2.5 Réflexif = libre pour  $n = 2$** 

Une raison pour laquelle la construction de réseaux par contraction va fonctionner dans le cas  $n = 2$  résulte du théorème suivant, puisque l'anneau  $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[x, y]]$  en vérifie les hypothèses.

**Théorème 5.2.16 ([67, Proposition 2])**

Sur un anneau local régulier de dimension 2, tout module réflexif  $M$  est libre.

Par conséquent, tous les réseaux construits par contraction sont en définitive libres dans la situation où  $n = 2$ . Il en découle le résultat suivant sur la réduction “complète” du rang du système de Pfaff (5.1).

**Théorème 5.2.17**

Considérons un système de Pfaff complètement intégrable à croisements normaux de rang  $(p, q)$

$$dY = \left( \frac{A(x, y)}{x^{p+1}} dx + \frac{B(x, y)}{y^{q+1}} dy \right) Y. \quad (5.7)$$

Soit  $p_0$  (resp.  $q_0$ ) le vrai rang de Poincaré du  $\frac{d}{dx}$ -opérateur différentiel  $\Delta_{(1)}$  (resp. du  $\frac{d}{dy}$ -opérateur différentiel  $\Delta_{(2)}$ ). Il existe alors une transformation de jauge  $Y = TZ$  avec  $T \in GL_m(K)$  telle que le système de Pfaff complètement intégrable à croisements normaux obtenu est de rang  $(p_0, q_0)$ . Autrement dit, le système obtenu s'écrit sous la forme

$$dZ = \left( \frac{\tilde{A}(x, y)}{x^{p_0+1}} dx + \frac{\tilde{B}(x, y)}{y^{q_0+1}} dy \right) Z$$

avec  $\tilde{A}(x, y), \tilde{B}(x, y) \in M_m(\mathcal{O})$ .

De plus  $(p_0, q_0)$  est minimal au sens suivant. Tout système de Pfaff complètement intégrable à croisements normaux de rang  $(\tilde{p}, \tilde{q})$  équivalent par une transformation de jauge au système (5.7) vérifie

$$(p_0, q_0) \preceq (\tilde{p}, \tilde{q}).$$

**Démonstration.** On pose  $\Lambda = \mathcal{O}_n^m$ . Le réseau  $\Lambda$  est libre et invariant par les opérateurs  $\Delta_{1,p+1}$  et  $\Delta_{2,q+1}$ . Par définition du vrai rang de Poincaré de  $\Delta_{(1)}$ , celui-ci est  $(p_0 + 1)$ -régulier. Par conséquent la suite de réseaux  $(F_{-i}^{1,p_0+1} \Lambda)_{i \geq 0}$  est stationnaire d'après le Théorème 5.2.10, et ce dès  $i = m - 1$ . Or ces réseaux sont réflexifs, donc libres d'après le résultat rappelé ci-dessus. En particulier, le réseau  $\Lambda' = F_{-m+1}^{1,p_0+1} \Lambda$  est libre et invariant par les opérateurs  $\Delta_{1,p_0+1}$  et  $\Delta_{2,q+1}$ .

On considère maintenant la suite de réseaux  $(F_{-i}^{2,q_0+1} \Lambda')_{i \geq 0}$ . Elle est stationnaire puisque  $\Delta_{(2)}$  est  $(q_0 + 1)$ -régulier, et ce dès  $i = m - 1$ . Le réseau  $\tilde{\Lambda} = F_{-m+1}^{2,q_0+1} \Lambda'$  est alors un réseau libre invariant par les opérateurs  $\Delta_{1,p_0+1}$  et  $\Delta_{2,q_0+1}$ .

Soient alors  $(f) = (f_1, \dots, f_m)$  une base du réseau  $\tilde{\Lambda}$  et  $T$  la matrice de passage de la base canonique  $(e)$  à la base  $(f)$ . La transformation de jauge  $Y = TZ$  conduit à un système de Pfaff complètement intégrable à croisements normaux de rang précisément  $(p_0, q_0)$ .

Le reste est évident.

□

### 5.3 Algorithme de Levelt et réduction de rang

Nous allons maintenant présenter l'algorithme de réduction de rang d'un système de Pfaff complètement intégrable à croisements normaux de rang  $(p, q)$

$$dY = \left( \frac{A(x, y)}{x^{p+1}} dx + \frac{B(x, y)}{y^{q+1}} dy \right) Y. \quad (5.8)$$

Nous donnons ici l'adaptation de la version descendante de l'algorithme de Levelt [11]. Elle repose sur le calcul effectif d'une base du réseau  $F_{-1}^{1,p}\Lambda$ , où  $\Lambda$  est le réseau  $\mathcal{O}^m$  ( $\mathcal{O}$  désigne ici l'anneau  $\mathbb{C}[[x, y]]$ ). Comme nous l'avons indiqué dans [11], on peut également adapter la version ascendante de l'algorithme de Levelt. Cela repose là aussi sur le calcul effectif d'une base du réseau  $F_1^{1,p}\Lambda$  en tout point identique à celui de  $F_{-1}^{1,p}\Lambda$ .

#### 5.3.1 Calcul effectif d'une base d'un contracté

Considérons un réseau libre  $\Lambda$  invariant par les opérateurs  $\Delta_{1,p+1}$  et  $\Delta_{2,q+1}$ . On suppose que l'on s'est donné une base  $(e) = (e_1, \dots, e_m)$  du réseau  $\Lambda$  et que l'on connaît  $\text{mat}(\Delta_1, (e))$  et  $\text{mat}(\Delta_2, (e))$ .

La matrice  $\text{mat}(\Delta_1, (e))$  s'écrit sous la forme  $\frac{A(x, y)}{x^{p+1}}$  avec  $A(x, y) \in M_m(\mathcal{O})$ . De même la matrice  $\text{mat}(\Delta_2, (e))$  s'écrit sous la forme  $\frac{B(x, y)}{y^{q+1}}$  avec  $B(x, y) \in M_m(\mathcal{O})$ .

D'après la section 5.2.5, le réseau  $F_{-1}^{1,p}\Lambda$  est un réseau libre, qui de plus est invariant par les opérateurs  $\Delta_{1,p+1}$  et  $\Delta_{2,q+1}$ .

Pour calculer une base  $(f) = (f_1, \dots, f_m)$  du réseau  $F_{-1}^{1,p}\Lambda$ , écrite dans la base  $(e)$ , on développe la matrice  $A(x, y)$  comme une série en  $x$  à coefficients dans  $M_m(\mathbb{C}[[y]])$ . On a donc

$$A(x, y) = \sum_{i \geq 0} A_i(y) x^i, \quad A_i \in M_m(\mathbb{C}[[y]]).$$

#### Lemme 5.3.1

Avec les notations ci-dessus, on a

$$F_{-1}^{1,p}\Lambda = \{v \in \Lambda; A_0 v \in x\Lambda\}.$$

La démonstration est la même que dans le cas ordinaire. La notation  $A_0 v$  est ici un abus d'écriture. Il faut comprendre  $A_0 v$  comme l'élément de  $K^m$  dont les coordonnées dans la base  $(e)$  sont égales à

$$A_0 \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}, \quad \text{avec } v = \sum_{i=1}^m v_i e_i.$$



On peut écrire la matrice  $A_0(y)$  sous forme normale de Smith. Il existe donc des matrices  $P(y), Q(y) \in GL_m(\mathcal{O})$  et des entiers  $0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_r$  où  $r$  désigne le rang de la matrice  $A_0(y)$  tels que

$$Q(y)A_0(y)P(y) = \text{diag}(y^{\alpha_1}, \dots, y^{\alpha_r}, 0, \dots, 0).$$

Il en résulte que la matrice  $P^{-1}(y)A_0(y)P(y)$  a ses  $m - r$  dernières colonnes nulles. De plus les  $m - r$  dernières colonnes de la matrice  $P$  forment une base de  $\ker(A_0(y))$ .

On note  $g_1, \dots, g_m$  les vecteurs dont les coordonnées dans la base  $(e)$  correspondent aux vecteurs colonnes de la matrice  $P$ . La famille  $(g) = (g_1, \dots, g_m)$  est alors une base du réseau  $\Lambda$  dont les  $m - r$  derniers éléments  $g_{r+1}, \dots, g_m$  forment une base de  $\ker(A_0(y))$ .

**Proposition 5.3.2**

La famille  $(xg_1, \dots, xg_r, g_{r+1}, \dots, g_m)$  forme une base du réseau  $F_{-1}^{1,p}\Lambda$ .

**Démonstration.** La famille  $(xg_1, \dots, xg_r, g_{r+1}, \dots, g_m)$  est bien une famille libre du réseau  $F_{-1}^{1,p}\Lambda$  puisque que chacun de ses éléments vérifie la condition du lemme précédent.

Il s'agit donc de montrer que c'est une famille génératrice du réseau  $F_{-1}^{1,p}\Lambda$ . Soit  $v \in F_{-1}^{1,p}\Lambda$ . Puisque  $v$  appartient à  $\Lambda$ , il existe un unique  $m$ -uplet  $(v_1, \dots, v_m) \in \mathcal{O}^m$  tel que  $v$  s'écrive

$$v = \sum_{i=1}^m v_i g_i.$$

Puisque  $g_{r+1}, \dots, g_m$  appartiennent à  $\ker(A_0(y))$ , on a donc

$$A_0(v) = A_0\left(\sum_{i=1}^r v_i g_i\right).$$

En écrivant  $v_i$  pour  $1 \leq i \leq r$  sous la forme

$$v_i = (v_i \text{ mod } x) + x\tilde{v}_i,$$

on obtient

$$A_0 v = A_0\left(\sum_{i=1}^r (v_i \text{ mod } x)g_i\right) + xA_0\left(\sum_{i=1}^r \tilde{v}_i g_i\right).$$

Il en découle que

$$A_0\left(\sum_{i=1}^r (v_i \text{ mod } x)g_i\right) \in x\Lambda.$$

Or  $A_0 g_i \in k[[y]]^m$  pour  $1 \leq i \leq r$ . Par conséquent,  $A_0\left(\sum_{i=1}^r (v_i \text{ mod } x)g_i\right)$  appartient à  $k[[y]]^m$ . Comme ses coordonnées dans la base  $(e)$  sont également

divisibles par  $x$  d'après ce qui précède, on en déduit que

$$A_0\left(\sum_{i=1}^r (v_i \bmod x)g_i\right) = 0.$$

Le vecteur  $\sum_{i=1}^r (v_i \bmod x)g_i$  appartient donc à  $\ker(A_0(y))$ , d'où  $v_i \bmod x = 0$  pour  $1 \leq i \leq r$ .

Par conséquent,  $v$  s'écrit

$$v = \sum_{i=1}^r \tilde{v}_i x g_i + \sum_{i=r+1}^m v_i g_i.$$

□

La démonstration ci-dessus montre que si  $(g_1, \dots, g_m)$  est une base du réseau  $\Lambda$  dont les  $m - r$  derniers éléments forment une base de  $\ker(A_0(y))$  alors  $(xg_1, \dots, xg_r, g_{r+1}, \dots, g_m)$  est une base du réseau  $F_{-1}^{1,p}\Lambda$ .

Pour déterminer une telle base  $(g_1, \dots, g_m)$ , on peut appliquer un pivot de Gauss sur les colonnes de  $A_0(y)$  en prenant pour stratégie de pivot, le choix d'un pivot de valuation  $y$ -adique minimale. Cela revient alors à multiplier à droite  $A_0(y)$  par une matrice  $P \in GL_m(\mathbb{C}[[y]])$  unimodulaire : les vecteurs colonnes de cette matrice  $P$  donnent la famille  $(g_1, \dots, g_m)$  souhaitée. Les colonnes de la matrice  $T = P \operatorname{diag}(x\mathbf{I}_r, \mathbf{I}_{m-r})$  forment donc une base du réseau  $F_{-1}^{1,p}\Lambda$ .

En résumé, pour calculer une base de  $F_{-1}^{1,p}\Lambda$ , il suffit d'appliquer les deux points suivants.

1. calculer une matrice unimodulaire  $P$  telle que ses  $m - r$  dernières colonnes forment une base de  $\ker(A_0(y))$ , où  $r$  est le rang de la matrice  $A_0(y)$ . Cela peut se faire en appliquant un pivot de Gauss avec la stratégie de pivot indiquée précédemment.
2. les colonnes de la matrice  $T := \operatorname{diag}(x\mathbf{I}_r, \mathbf{I}_{m-r})$  forment alors une base du réseau  $F_{-1}^{1,p}\Lambda$ .

### Remarque 5.3.3

Le calcul d'une base du réseau  $F_{-1}^{2,q}\Lambda$  est en tout point identique.

## 5.3.2 Description de l'algorithme

Nous expliquons ici comment réduire  $p$  à son minimum, c'est-à-dire au vrai rang de Poincaré de l'opérateur  $\Delta_{(1)}$ . L'idée consiste à appliquer au système de Pfaff (5.8) la transformation  $Y = TZ$ , où  $T$  est la matrice de passage d'une base du réseau  $\Lambda$  (égal à  $\mathcal{O}^m$  au départ) à une base du réseau  $F_{-1}^{1,p}\Lambda$ . Cette transformation  $Y = TZ$  se calcule en suivant les étapes 1 et 2 données ci-dessus. On obtient alors un système de Pfaff complètement intégrable à

croisements normaux de rang  $(\tilde{p}, \tilde{q}) \preceq (p, q)$  : en particulier on a  $\tilde{p} < p$  ou  $\tilde{p} = p$ . On réapplique une transformation  $Y = TZ$  au nouveau système obtenu en suivant les étapes 1 et 2 ci-dessus ; et ainsi de suite... On s'arrête dès que  $p$  est égal à 0 ou ne change pas après  $m - 1$  transformations  $Y = TZ$ . Pour ce dernier système,  $p$  est alors égal au vrai rang de Poincaré du système  $\Delta_{(1)}$ , et donc minimal. Cela conduit à l'algorithme suivant. On désigne par  $T[A]$  et  $T[B]$  les matrices obtenues après la transformation de jauge  $Y = TZ$  dans le système de Pfaff (5.8).

**Algorithme 4.**  
**Réduction\_de\_rang**

---

**entrée:**  $A(x, y), B(x, y) \in M_m(k[[x, y]])$   
 $p_0, q_0$  des entiers naturels.  
**sortie:**  $T$  une transformation de jauge  
 $M := T[A]$  avec  $\text{ord}_x(M)$  minimal  
 $N := T[B]$  avec  $\text{ord}_y(N) \leq q_0 + 1$

---

$M := A(x, y)/x^{p_0+1}, N := B(x, y)/y^{q_0+1}$   
 $T := I_m$   
 $p := p_0 + 1$   
 $i := 0$   
**Tant que**  $i < m - 1$  **et**  $p > 1$  **faire**  
 $M_0 := (x^p M)|_{x=0}$   
 $r := \text{rank}(M_0)$   
Calculer  $P$  unimodulaire telle que  
 $P^{-1}M_0P$  a ses  $m - r$  dernières colonnes nulles  
 $P := P \text{diag}(xI_r, I_{m-r})$   
 $M := P^{-1}(MP - \frac{\partial P}{\partial x})$   
 $N := P^{-1}(NP - \frac{\partial P}{\partial y})$   
 $T := TP$   
 $\tilde{p} := -\text{val}_x(M)$   
**Si**  $\tilde{p} < p$  **alors**  $i := 0$  **sinon**  $i := i + 1$   
**Fin si**  
 $p := \tilde{p}$   
**Fin tant que**  
RETOURNER( $T, M, N$ )

**Proposition 5.3.4**

Étant donné un système de Pfaff (5.8). L'algorithme **Réduction\_de\_rang** calcule un système équivalent de la forme

$$dZ = \left( \frac{\tilde{A}(x, y)}{x^{\tilde{p}+1}} dx + \frac{\tilde{B}(x, y)}{y^{\tilde{q}+1}} dy \right) Z, \quad (5.9)$$

avec  $\tilde{A}(x, y), \tilde{B}(x, y) \in M_m(\mathcal{O})$ ,  $(\tilde{p}, \tilde{q}) \preceq (p, q)$  et  $\tilde{p}$  égal au vrai rang de Poincaré de  $\Delta_{(1)}$ .

**Démonstration.** On note  $T_j$  la transformation de jauge  $T$  obtenue à l'étape  $j$ , et  $\Lambda_j$  le réseau correspondant, engendré par les vecteurs colonnes de  $T_j$ . Soit  $(p_j, q_j)$  le rang du système à l'étape  $j$ .

À l'étape 0, on a  $\Lambda_0 = \mathcal{O}^m$  et pour tout  $j \geq 0$ ,  $\Lambda_{j+1} = F_{-1}^{1,p_j} \Lambda_j$ . Par conséquent, le réseau  $\Lambda_j$  est invariant par les opérateurs  $\Delta_{1,p+1}$  et  $\Delta_{2,q+1}$  pour tout  $j \geq 0$ . Cela entraîne que le système retourné est de la forme (5.9) avec  $(\tilde{p}, \tilde{q}) \preceq (p, q)$ .

Il reste à voir que  $\tilde{p}$  est égal au vrai rang de Poincaré de l'opérateur  $\Delta_{(1)}$ . Supposons qu'à l'étape  $j$ , le rang  $p_j$  soit plus grand que le vrai rang de Poincaré de l'opérateur  $\Delta_{(1)}$ . Cela entraîne que l'opérateur  $\Delta_{(1)}$  est  $p_j$ -régulier. Mais alors la suite de réseaux  $(F_{-i}^{1,p_j} \Lambda_j)_{i \geq 0}$  est constante à partir d'un certain  $1 \leq i \leq m - 1$ , d'après le Théorème 5.2.10. En particulier, l'algorithme ne s'arrête pas à l'étape  $j$  et de plus, il existe  $j' > j$  tel que  $p_{j'} < p_j$ . Ce qui montre que  $\tilde{p}$  est égal au vrai rang de Poincaré de  $\Delta_{(1)}$ .

□

Une fois que nous avons obtenu un système équivalent avec  $\tilde{p}$  minimal et  $\tilde{q} \leq q$ , nous souhaitons réduire  $\tilde{q}$  au minimum sans augmenter  $\tilde{p}$ . Pour cela, il suffit de remplacer  $\Delta_1$  par  $\Delta_2$  dans les constructions (on considère donc les réseaux  $F_{-i}^{2,q} \Lambda$ ) et d'appliquer l'algorithme précédent en échangeant  $x$  et  $y$  ... Ainsi en appliquant l'algorithme **Réduction\_de\_rang** à  $(T[B], T[A])$ , où  $T$  est la transformation de jauge obtenue pour réduire  $(p, q)$  à  $(\tilde{p}, \tilde{q})$ , on obtient un système de la forme (5.9) équivalent à (5.8) avec  $\tilde{p}$  et  $\tilde{q}$  égaux aux vrais rangs de Poincaré des opérateurs  $\Delta_{(1)}$  et  $\Delta_{(2)}$  respectivement.

# Conclusion

Dans cette partie, nous avons proposé des algorithmes en vue de calculer les solutions formelles de certains systèmes d'EDPs linéaires au voisinage de leur lieu singulier. Nous avons montré comment rendre effectifs les résultats donnés dans [33, 75] afin de calculer une matrice fondamentale de solutions de la forme

$$Tx_1^{B^{(1)}} \dots x_n^{B^{(n)}},$$

où  $T \in GL_m(K_n)$  et les matrices  $B^{(i)} \in M_m(\mathbb{C})$  commutent deux à deux, pour les systèmes de première espèce

$$dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i} dx_i \right) Y.$$

Un premier travail à faire est d'implanter les méthodes de calcul obtenues, puis de les comparer.

Nous avons ensuite résolu le problème de la réduction de rang pour les systèmes de Pfaff complètement intégrables à croisements normaux

$$dY = \left( \sum_{i=1}^n \frac{A^{(i)}}{x_i^{p_i+1}} dx_i \right) Y$$

dans le cas  $n = 2$ . Nous avons montré comment le résoudre en adaptant l'algorithme de Levelt. Dans le cas ordinaire, la réduction du rang est une étape essentielle dans le calcul d'une matrice fondamentale de solutions formelles au voisinage d'une singularité polaire [8]. Par ailleurs, H. Charrière [22] pour le cas  $n = 2$ , puis A.H.M. Levelt et A. van den Essen [30], et H. Charrière et R. Gérard [23] pour  $n$  quelconque, ont montré que le théorème de Turrittin s'adaptait à ce type de systèmes. Plus précisément, ils ont montré qu'il existe des ramifications  $t_i = x_i^{s_i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , où les  $s_i$  sont des entiers strictement positifs et une transformation de jauge  $Y = TZ$ , où  $T$  est une matrice inversible à entrées dans  $\mathbb{C}[[t_1, \dots, t_n]]$ , qui conduit à un système de la forme

$$\begin{cases} t_1^{s_1 p_1 + 1} \frac{\partial Z}{\partial t_1} & = & B^{(1)} Z \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_n^{s_n p_n + 1} \frac{\partial Z}{\partial t_n} & = & B^{(n)} Z \end{cases}$$

où les matrices  $B^{(i)}$  sont triangulaires supérieures à entrées dans  $\mathbb{C}[[t_i]]$  et commutent deux à deux. Ce résultat permet d'obtenir le type de solutions formelles auxquelles on s'attend. Nous cherchons actuellement à adapter les méthodes de calcul de solutions formelles basées sur la réduction de rang dans le cas ordinaire (ex. [8]) au cas  $n = 2$ . A ce sujet, c'est l'algorithme de Moser qui est employé dans ces méthodes de calcul, afin de récupérer les exposants locaux. Une question en suspens est donc d'adapter l'algorithme de Moser et de contourner le problème du cas  $s = r$  dans l'algorithme de Moser. On pourrait donc penser au premier abord que l'algorithme de Levelt ne permet pas de récupérer les exposants locaux. Néanmoins pour calculer ces exposants, seul importe de pouvoir :

- calculer l'*invariant de Katz*<sup>1</sup> ;
- appliquer le *splitting lemma* [79, 60].

Mais en se privant de l'algorithme de Moser, le prix à payer en terme de temps de calcul est sûrement plus important. Mentionnons que le *splitting lemma* reste vrai pour les systèmes de Pfaff complètement intégrables à croisements normaux [30, 23].

À terme se poseront des questions sur l'incarnation de ces séries solutions comme développement asymptotique de vraies solutions. Des résultats partiels existent dans ce sens (ex. [34, 52] ou encore [33, 75] dans le cas régulier).

Nous nous sommes restreints au cas  $n = 2$  pour la réduction de rang, où cela se passe sans encombre. Que dire dans le cas général? Les réseaux que l'on est naturellement amené à construire, par exemple le réseau  $F_{-1}^{1,p_1} \mathcal{O}_n^m$ , sont obtenus par de l'algèbre linéaire sur l'anneau  $\mathbb{C}[[x_2, \dots, x_n]]$ . Ainsi le réseau  $F_{-1}^{1,p_1} \mathcal{O}_n^m$  est égal à  $\{v \in \mathcal{O}_n^m : A_0^{(1)}v \in x_1 \mathcal{O}_n^m\}$ . Donner une représentation de ce réseau, par exemple une base s'il en existe une, est clairement un problème d'algèbre linéaire. Comme nous l'avons vu, les réseaux construits sont réflexifs. En revanche, dès que  $n \geq 3$ , un réseau réflexif n'est plus nécessairement libre. Par conséquent il n'y a aucune raison que les réseaux construits soient libres. Cela soulève beaucoup de questions, entre autre la suivante d'importance :

Y-a-t-il équivalence entre l'existence d'un réseau  $\Lambda$  vérifiant  $\Delta_{i,q_i+1} \Lambda \subseteq \Lambda$  pour  $1 \leq i \leq n$  et l'existence d'un système équivalent de rang  $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n)$  vérifiant  $\tilde{p} \preceq \underline{q}$ ?

Cette question est à comparer avec le Théorème 5.1.4. Une question en corollaire à celle-ci est de montrer si le Théorème 5.2.17 se généralise pour  $n$  arbitraire.

Nous nous sommes intéressés aux systèmes de Pfaff complètement intégrables à croisements normaux. Que se passe-t-il quand le lieu singulier n'est plus à croisements normaux? Il existe des résultats pour des lieux singuliers plus compliqués, mais les résultats connus à notre connaissance ne sont valables que pour des systèmes de Pfaff possédant au pis des pôles logarith-

---

<sup>1</sup>Il est égal au plus haut degré en  $1/x$  dans les exposants locaux.

miques en leur lieu singulier (ex. [73, 74, 56]). De plus la plupart des résultats connus s'obtiennent à l'aide de méthodes de désingularisation pour se ramener à la situation d'un système de Pfaff à croisements normaux [74, 56]. Le caractère non effectif de ces méthodes et l'aspect "général" des système de Pfaff à croisements normaux ont motivé la restriction de notre étude. Un travail futur sera d'étudier les systèmes de Pfaff possédant des lieux singuliers plus généraux.





# Bibliographie

- [1] F. AROCA et J. CANO : Formal Solutions of Linear PDEs and Convex Polyhedra. *JSC*, 32:717–737, 2001.
- [2] M.T. ATIYAH et I.G. Mac DONALD : *Introduction to Commutative Algebra*. Addison Wesley, 1969.
- [3] D. BABBITT et V.S. VARADARAJAN : Formal Reduction Theory of Meromorphic Differential Equations : a Group Theoretic View. *Pacific Journal of Mathematics*, 109(1):1–80, 1983.
- [4] W. BALSER : *Formal Power Series and Linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations*. Springer, 2000.
- [5] W. BALSER, W.B. JURKAT et D.A. LUTZ : A General Theory of Invariants for Meromorphic Differential Equations ; Part I, Formal Invariants. *Funkcialaj Evacioj*, 22:197–221, 1979.
- [6] W. BALSER, W.B. JURKAT et D.A. LUTZ : A General Theory of Invariants for Meromorphic Differential Equations ; Part II, Proper Invariants. *Funkcialaj Evacioj*, 22:257–283, 1979.
- [7] M. BARKATOU : A Rational Version of Moser’s Algorithm. *In Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 297–302. ACM Press, July 1995.
- [8] M. BARKATOU : An Algorithm to Compute the Exponential Part of a Formal Fundamental Matrix Solution of a Linear Differential System. *AAECC*, (8):1–23, 1997.
- [9] M. BARKATOU, T. CLUZEAU et J.A. WEIL : Factoring Partial Differential Systems in Positive Characteristic. *In Differential Equations and Symbolic Computation*. Birkhauser, 2005.
- [10] M. BARKATOU et E. PFLÜGEL : An Algorithm Computing the Regular Formal Solutions of a System of Linear Differential Equations. *JSC*, 28: 569–587, 1999.
- [11] M. BARKATOU et N. Le ROUX : Rank Reduction of a class of Pfaffian System in Two Variables. *In J.G. DUMAS, éditeur : ISSAC 2006*, pages 204–211. ACM Press, 2006.
- [12] A. BOSTAN : *Algorithmique efficace pour les opérations de base en calcul formel*. Thèse de doctorat, Ecole polytechnique, 2003.

- [13] A. BOSTAN, F. CHYZAK, F. OLLIVIER, B. SALVY, E. SCHOST et A. SEDOGLAVIC : Fast computation of power series solutions of systems of differential equations. Disponible sur arXiv : cs.SC/0604101.
- [14] F. BOULIER et E. HUBERT : DIFFALG : *description, help pages and examples of use*. Symbolic Computation Group, University of Waterloo, Ontario, Canada, 1998. Disponible à l'url <http://www.inria.fr/cafe/Evelyne.Hubert/webdiffalg>.
- [15] F. BOULIER, D. LAZARD, F. OLLIVIER et M. PETITOT : Representation for the radical of a finitely generated differential ideal. In A. H. M. LEVELT, éditeur : *ISSAC'95*. ACM Press, New York, 1995.
- [16] F. BOULIER, D. LAZARD, F. OLLIVIER et M. PETITOT : Computing representations for radicals of finitely generated differential ideals. Rapport technique IT-306, LIFL, 1997.
- [17] N. BOURBAKI : *Eléments de mathématiques, Algèbre commutative*, chapitre 7. Hermann, 1965.
- [18] D. BOUZIANE, A. KANDRI RODY et H. MAÂROUF : Unmixed-dimensional decomposition of a finitely generated perfect differential ideal. *Journal of Symbolic Computation*, 31(6):631–649, 2001.
- [19] R. P. BRENT et H. T. KUNG : Fast algorithms for manipulating formal power series. *Journal of the Association Computing Machinery*, 25(4):581–595, 1978.
- [20] G. CARRA FERRO : Gröbner bases and differential algebra. In *AAECC*, volume 356 de *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag Berlin, 1987.
- [21] H. CARTAN : *Théorie élémentaire des fonctions analytiques*. Hermann, 1985.
- [22] H. CHARRIÈRE : Triangulation formelle de certains systèmes de Pfaff complètement intégrables et application à l'étude  $c^\infty$  des systèmes non linéaires. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 7(4):625–714, 1980.
- [23] H. CHARRIÈRE et R. GÉRARD : Formal Reduction of Integrable Linear Connexion having a certain kind of Irregular Singularities. *analysis*, 1:85–115, 1981.
- [24] G. CHEN : An Algorithm for Computing the Formal Solutions of Differential Systems in the Neighborhood of an Irregular Point. In *Proceeding of ISSAC 90*, pages 231–235.
- [25] E. COREL : Moser-reduction of Lattices for a Linear Connection. travail en cours, disponible à l'url <http://www.institut.math.jussieu.fr/~corel/>.
- [26] E. COREL : *Exposant, réseaux de Levelt et relations de Fuchs pour les systèmes différentiels réguliers*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1999.

- 
- [27] P. DELIGNE : *Equations Différentielles à Points Singuliers Réguliers*, volume 163 de *Lecture Notes In Mathematics*. Springer-Verlag, 1970.
- [28] J. DENEFF et L. LIPSHITZ : Power series solutions of algebraic differential equations. *Mathematische Annalen*, 267(2):213–238, 1984.
- [29] A. VAN DEN ESSEN : Regular Singularities along Normal Crossings. In Gérard RAMIS, éditeur : *Systèmes de Pfaff et Equations Différentielles dans le Champ Complexe*, volume 712 de *Lecture Notes*, pages 88–130. Springer-Verlag, 1979.
- [30] A. VAN DEN ESSEN et A.H.M. LEVELT : Irregular Singularities in Several Variables. *Memoirs of AMS*, 40(270), 1982.
- [31] K. O. GEDDES : Convergence behaviour of the Newton iteration for first-order differential equations. In *Symbolic and algebraic computation (EUROSAM '79, Internat. Sympos., Marseille, 1979)*, pages 189–199. Springer, Berlin, 1979.
- [32] R. GÉRARD et A.H.M. LEVELT : Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier des systèmes d'équations différentielles linéaires. *Annales de l'Institut Fourier*, 23(1):157–195, 1973.
- [33] R. GÉRARD et A.H.M. LEVELT : Sur les connexions à singularités régulières dans le cas de plusieurs variables. *Funkcialaj Ekvacioj*, 19(2):149–173, 1976.
- [34] R. GÉRARD et Y. SIBUYA : Etude de certains systèmes de Pfaff avec singularités. In Gérard RAMIS, éditeur : *Systèmes de Pfaff et Equations Différentielles dans le Champ Complexe*, volume 712 de *Lecture Notes*, pages 131–288. Springer-Verlag, 1979.
- [35] L. GUO, W. F. KEIGHER, P. J. CASSIDY et W. Y. SIT, éditeurs. *Differential Algebra and Related Topics*. World Scientific Publishing Co., 2002.
- [36] A. HILALI : *Solutions formelles de systèmes différentiels linéaires au voisinage d'un point singulier*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier. Grenoble, 1987.
- [37] A. HILALI et A. WAZNER : Un algorithme de calcul de l'invariant de Katz d'un système différentiel linéaire. *Annales de l'institut Fourier*, 36(3):67–81, 1986.
- [38] J. VAN DER HOEVEN : Generalized Power Series Solutions to Linear Partial Differential Equations. Manuscrit. Disponible à l'url <http://mahery.math.u-psud.fr/~vdhoeven/>.
- [39] J. VAN DER HOEVEN : Relax but don't be too Lazy. *JSC*, 34:479–542, december 2002.
- [40] E. HUBERT : Factorisation free decomposition algorithms in differential algebra. *Journal of Symbolic Computation*, 29(4-5):641–662, 2000.
- [41] E. HUBERT : Notes on triangular sets and triangulation-decomposition algorithms I : Polynomial systems. In F.WINKLER et U.LANGER,

- éditeurs : *Symbolic and Numerical Scientific Computation*, LNCS, pages 1–39. Springer, 2003.
- [42] E. HUBERT : Notes on triangular sets and triangulation-decomposition algorithms II : Differential systems. In F.WINKLER et U.LANGER, éditeurs : *Symbolic and Numerical Scientific Computation*, LNCS, pages 40–87. Springer, 2003.
- [43] E. HUBERT et N. Le ROUX : Computing Power Series Solutions of a Nonlinear PDE System. In J.R. SENDRA, éditeur : *ISSAC 2003*, pages 148–155. ACM Press, 2003.
- [44] S. KOBAYASHI et N. NOMIZU : *Foundations of Differential Geometry. Volume 1*. John Wiley, 1964.
- [45] E. R. KOLCHIN : *Differential Algebra and Algebraic Groups*, volume 54 de *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, New York-London, 1973.
- [46] E.R. KOLCHIN : *Selected works of Ellis Kolchin with commentary*. Commentaries by Armand Borel, Michael F. Singer, Bruno Poizat, Alexandru Buium and Phyllis J. Cassidy, Edited and with a preface by Hyman Bass, Buium and Cassidy. American Mathematical Society, 1999.
- [47] J.P. LAFON : *Algèbre commutative. Langages géométrique et algébrique*. Hermann, 1977.
- [48] F. LEMAIRE : *Contribution à l’algorithmique en algèbre différentielle*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, <http://www.lifl.fr/~lemaire/pub>, 2002.
- [49] F. LEMAIRE : Les classements les plus généraux assurant l’analyticité des solutions des systèmes orthonomes pour des conditions initiales analytiques. In *CASC 2002*. Springer, 2002. Voir <http://www.lifl.fr/LIFL1/publications.html>.
- [50] A.H.M. LEVELT : Stabilizing Differential Operators. In M. SINGER, éditeur : *Differential Equations and Computer Algebra*. Academic Press, 1991.
- [51] A.H.M. LEVELT : The Semi-Simple Part of a Matrix. Disponible à l’url <http://www.math.ru.nl/medewerkers/ahml/other.htm>, 1993.
- [52] H. MAJIMA : *Asymptotic Analysis for Integrable Connections with Irregular Singular Points*, volume 1075 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1984.
- [53] B. MALGRANGE : Connexions méromorphes 2 : Le réseau canonique. *Inventiones mathematicae*, 124:367–387, 1996.
- [54] E. L. MANSFIELD : *Differential Gröbner Bases*. Thèse de doctorat, University of Sydney, 1991.
- [55] J. MOSER : The Order of a Singularity in Fuchs’ Theory. *Mathematische Zeitschrift*, 72:379–398, 1960. Disponible à l’url <http://gdz.sub.uni-goettingen.de/search-entry.shtml>.

- 
- [56] D. NOVIKOV et S. YAKOVENKO : Lectures on Meromorphic Flat Connections. *In Normal Forms, Bifurcations and Finiteness Problems in Differential Equations*, pages 387–430. Kluwer, 2004.
- [57] F. OLLIVIER : *Le problème de l'identifiabilité Structurale Globale : Approche Théorique, Méthodes Effectives et Bornes de Complexité*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, 1990.
- [58] F. OLLIVIER : Standard bases of differential ideals. *In Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes (Tokyo, 1990)*, pages 304–321. Springer, Berlin, 1991.
- [59] A. PELADAN-GERMA : Testing equality in differential ring extensions defined by pde's and limit conditions. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 13(4):257–288, 2002.
- [60] E. PFLÜGEL : *Résolution symbolique des systèmes différentiels linéaires. Le logiciel ISOLDE : étude théorique et réalisation*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1992.
- [61] G. J. REID, A. D. WITTKOPF et A. BOULTON : Reduction of systems of nonlinear partial differential equations to simplified involutive forms. *Eur. J. of Appl. Math.*, 7:604 – 635, 1996.
- [62] C. RIQUIER : *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*. Gauthier-Villars, Paris, 1910.
- [63] J. F. RITT : *Differential Algebra*, volume XXXIII de *Colloquium publications*. American Mathematical Society, 1950. [http://www.ams.org/online\\_bks](http://www.ams.org/online_bks).
- [64] A. ROSENFELD : Specializations in differential algebra. *Transaction of the American Mathematical Society*, 90:394–407, 1959.
- [65] C. J. RUST, G. J. REID et A. D. WITTKOPF : Existence and uniqueness theorems for formal power series solutions of analytic differential systems. *In Proceedings of ISSAC*, pages 105–112. ACM, 1999.
- [66] M. SAITO, B. STURMFELS et N. TAKAYAMA : *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations*, volume 6 de *Algorithms and Computations in Mathematics*. Springer, 2000.
- [67] P. SAMUEL : Anneaux gradués factoriels et modules réflexifs. *Bulletin de la S.M.F.*, 92:237–249, 1964.
- [68] R. SCHÄFKE et H. VOLKMER : On the Reduction of the Poincaré Rank of Singular Systems of Ordinary Differential Equations. *J. Reine Angew. Math.*, (365):80–96, 1986.
- [69] E. SCHOST : Multivariate power series multiplication. *In ISSAC 2005*. ACM Press.
- [70] A. SEDOGLAVIC : A probabilistic algorithm to test local algebraic observability in polynomial time. *In Proceedings of ISSAC 2001*, pages 309–316. ACM, 2001.

- [71] A. SEIDENBERG : Abstract differential algebra and the analytic case. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 9:159–164, 1958.
- [72] W. SIT : The Ritt-Kolchin theory for differential polynomials. *In* GUO *et al.* [35].
- [73] K. TAKANO : A Reduction Theorem for a Linear Pfaffian System with Regular Singular Points. *Arch. Math.*, 31:310–316, 1978.
- [74] K. TAKANO : Local Equivalence of Linear Pfaffian Systems with Simple Poles. *Funkcialaj Ekvacioj*, 24:373–382, 1981.
- [75] T. TAKANO et M. YOSHIDA : On a Linear System of Pfaffian Equations with Regular Singular Points. *Funkcialaj Ekvacioj*, 19:175–189, 1976.
- [76] H.L. TURRITTIN : Convergent Solutions of Ordinary Linear Homogeneous Equations in the Neighborhood of an Irregular Singular Point. *Acta Math.*, 93:27–66, 1955.
- [77] J. von zur GATHEN et J. GERHARD : *Modern Computer Algebra*. Cambridge university press, 1999.
- [78] E. WAGENFÜHRER : On the Computation of Formal Fundamental Solutions of Linear Differential Equations at a Singular Point. *Analysis*, 9:389–405, 1989.
- [79] W. WASOW : *Asymptotic Expansions of Ordinary Differential Equations*. Dover Phoenix Editions, 2002.
- [80] A. WITKOPF et G. REID : *The RIF package*. CECM - Simon Fraser University - Vancouver, <http://www.cecm.sfu.ca/~wittkopf/rif.html>.
- [81] W. T. WU : On the foundation of algebraic differential geometry. *Systems Science and Mathematical Sciences*, 2(4):289–312, 1989.

# Index

- End( $E$ ), 76
- $\lim_{\leftarrow} f_i$ , 76
- $\pi_i$ , 76
- $\theta_i$ , 76
- $\mathcal{O}_{(f)}$ , 122
- $\mathfrak{P}(\lambda)$ , 97
- $m(A)$ , 96
- $\mu(A)$ , 96
- $\mathcal{M}(n)$ , 22
- $\Delta$ , 100
  - mat( $\Delta, (e)$ ), 100
  - $\Delta_\ell$ , 101
  - $\ell$ -régulier, 101
  - $\Delta^*$ , 106
- $\Delta_i$ , 57, **74**
  - $\Delta_{i,1}$ , 65, **74**
    - ${}^n\Delta_{i,1}$ , 79
    - ${}^s\Delta_{i,1}$ , 79
  - $\bar{\Delta}_{i,1}$ , 80
  - $\Delta_{i,k_i}$ , 118
- $\Delta^{(i)}$ , 118
- $\leq e$ , 89
- $\text{ord}_x(f)$ , 95
- $\text{ord}_x(M)$ , 95
- $\mathcal{P}$ , 122
- $\Lambda$ , 62
  - $\bar{\Lambda}$ , 79
  - $F_i^\ell \Lambda$ , 102
  - $F_{-i}^\ell \Lambda$ , 102
  - $\Lambda^*$ , 106
  - $F_j^{i,\ell} \Lambda$ , 120
  - $F_{-j}^{i,\ell} \Lambda$ , 121
- algorithme
  - Levelt
    - version ascendante, 103
    - version descendante, 105
  - Moser, voir Moser
- bon spectre, 66
- $\mathbb{C}$ -dérivation, 74
- conditions initiales régulières, 19
- $\delta$ -opérateur différentiel, 74
  - dual, 106
- endomorphisme, 75
  - semi-simple, 76
  - topologiquement nilpotent, 77
- $\ell$ -régularité, 101
  - critère
    - Gérard et Levelt, 102
    - Levelt, 103
- Moser
  - algorithme, 97
  - critère, 97
  - irréductible, 97
  - réductible, 97
  - rang, 96
  - vrai rang, 96
- rang, 95
  - de Moser, voir Moser
  - réduction, 95
- réseau, 75
  - dual, 106
  - réflexif, 121
- système de Pfaff, 57
  - complètement intégrable, 58
  - de première espèce, 58
  - réduction du rang, 59
  - régulier, 60
  - rang, 58

- systemes de premiere espèce
  - ayant un bon spectre, 69
  - réduit
    - à l'ordre  $N$ , 88
    - fortement, 87
    - relativement à un triplet, 87
- vrai rang
  - de Moser, voir Moser
  - de Poincaré, 96



**Abstract :** In this thesis, we build algorithms for computing formal solutions of systems of nonlinear partial differential equations (PDE). It is divided in two parts. In a first part, we give a new method of Newton type for computing formal power series solutions at a regular point for a large class of non linear systems of PDE introduced by F. Boulier and al. These systems appear when applying differential elimination tools. The Newton method given here is an alternative to the method by derivation-evaluation proposed by F. Boulier and al. We sketch a first comparison between the two methods by means of complexity, restricting ourself to the case of a first order ODE. Furthermore, we give a modular Newton method in the case of a first order ODE in order to take coefficients growth into account.

In a second part, we are studying completely integrable Pfaffian systems with normal crossing at the origin. First, we give two methods for computing solutions of Pfaffian systems of the first kind at the origin. The two methods are based on works by R. Gérard and A.H.M. Levelt and T. Takano and M. Yoshida. Furthermore we give a constructive proof of a theorem By R. Gérard and A.H.M. Levelt under a generic assumption. This proof gives a method for computing solutions of a Pfaffian system of first kind satisfying this assumption.

Next, we give an answer to the rank reduction problem for Pfaffian systems of the second kind and give a rank reduction algorithm in the two variables case. This problem is linked with the computation of its solutions. We recall well known algorithms for rank reduction of linear ordinary differential systems : Moser algorithm and Levelt algorithm. We show a duality property between increasing and decreasing versions of Levelt algorithm. This property turns out to be very important. Furthermore we study complexity between Moser algorithm and Levelt algorithm.

Thanks to the duality property, we obtain a new criterium about regularity of Pfaffian system of the second kind in the case of  $n$  variables,  $n$  arbitrary. This can be viewed as the dual criterium of a criterium by A. van den Essen. Then, we build a rank reduction algorithm for Pfaffian systems of the second kind in two variables by adapting the decreasing version of Levelt algorithm.

**keywords:** Computer algebra, PDE systems, differential algebra, newton method, singularities, asymptotic expansion.

**Résumé :** Dans ce travail, nous construisons des algorithmes de calcul de solutions formelles de systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP). La thèse se divise en deux parties. Dans une première partie, nous proposons une nouvelle méthode du type Newton pour le calcul en un point régulier des séries formelles solutions d'une famille de systèmes d'EDP non linéaires qui a été définie par F. Boulier et ses collaborateurs. Ces systèmes apparaissent dans les algorithmes d'élimination différentielle. Cette méthode de Newton est une alternative à la méthode par dérivation-évaluation de F. Boulier et ses collaborateurs. Nous faisons une première ébauche d'étude de complexité entre la méthode de Newton et la méthode par dérivation-évaluation en nous restreignant aux équations différentielles. Nous proposons de plus une version modulaire de la méthode de Newton dans le cas d'une équation différentielle du premier ordre, pour tenir compte de l'explosion des coefficients de la série à calculer.

Dans une seconde partie, nous étudions les systèmes de Pfaff complètement intégrables à croisements normaux en l'origine. Tout d'abord, nous proposons deux méthodes de calcul des solutions à l'origine pour les systèmes de Pfaff dits de première espèce basées sur les travaux de R. Gérard et A.H.M. Levelt et T. Takano et M. Yoshida. Nous donnons de plus une nouvelle démonstration constructive du théorème de Gérard et Levelt sous une hypothèse de genericité qui permet de calculer les solutions d'un système de Pfaff de première espèce vérifiant cette hypothèse. Puis, nous étudions le problème de la réduction de rang d'un système de Pfaff de seconde espèce, problème lié étroitement au calcul de ses solutions. Nous rappelons d'abord deux algorithmes classiques de réduction de rang d'un système différentiel linéaire d'ordre 1 : les algorithmes de Moser et de Levelt. Nous mettons alors en évidence la dualité entre les versions descendantes et ascendantes de l'algorithme de Levelt, propriété essentielle dans la suite de notre travail. Nous en profitons pour donner la complexité en opérations arithmétiques des algorithmes de Moser et de Levelt. La dualité nous permet de caractériser la régularité d'un système de Pfaff de seconde espèce en terme de stationnarité d'une suite décroissante de réseaux : ce critère est la version duale du critère de A. van den Essen. Grâce à cette caractérisation, nous obtenons un algorithme de réduction de rang des systèmes de Pfaff de seconde espèce dans le cas de deux variables, en adaptant la version descendante de l'algorithme de Levelt.

**mots-clés :** Calcul formel, systèmes d'EDP, algèbre différentielle, méthode de Newton, singularités, développements asymptotiques.