

**UNIVERSITÉ DE LIMOGES**

**ÉCOLE DOCTORALE Sciences - Technologie - Santé**

**FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES**

**Département Mathématiques et Informatique - XLIM**

**Thèse N°**

**Thèse**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LIMOGES**

**Discipline : Mathématiques et Applications**

présentée et soutenue par

**Ahmed AÏT-MOKHTAR**

le 01 juillet 2008

**ENDOMORPHISMES D'ALGÈBRES  
DE SUITES**

**Thèse dirigée par Abdelkader NECER et Alain SALINIER**

**JURY**

**Rapporteurs**

M. Jean-Paul ALLOUCHE  
M. Gilles CHRISTOL

Directeur de Recherche au CNRS, LRI-Université Paris XI  
Professeur, Université P. et M. Curie, Paris VI

**Examineurs**

M. Daniel BARSKY  
M. Thierry BERGER  
M. Abdelkader NECER  
M. Alain SALINIER

Directeur de Recherche au CNRS, Université Paris XIII  
Professeur, Université de Limoges  
Maître de Conférences, Université de Limoges  
Maître de Conférences, Université de Limoges



# Remerciements

Mes remerciements vont en premier lieu à Abdelkader Necer, mon co-promoteur, ami et ancien collègue enseignant à l'U.S.T.H.B, pour m'avoir confié ce travail sur les endomorphismes de suites récurrentes linéaires. Je le remercie beaucoup de m'avoir initié au Latex, soutenu par ses précieux conseils et pour avoir accompli toutes les formalités administratives du début de mon inscription à l'université de Limoges jusqu'à la fin de ma thèse.

Je remercie également mon promoteur Alain Salinier d'avoir accepté de travailler avec moi et du temps qu'il m'a consacré, avec A. Necer, pour mener à bien ma thèse de doctorat.

J'exprime ma gratitude la plus sincère à Gilles Christol et Jean Paul Allouche qui m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs et d'avoir porté des corrections à mon travail sans laisser passer la moindre erreur d'orthographe, de grammaire et de mathématique.

Mes remerciements vont aussi à Daniel Barsky et Thierry Berger pour avoir porté de l'intérêt pour mon travail en acceptant d'être des membres du jury.

Un grand merci à Benali Benzaghrou qui, le premier, m'a initié à la recherche mathématique en me donnant l'occasion de soutenir une thèse de Magister sous sa direction à L'U.S.T.H.B en 1989.

Je tiens aussi à remercier A. Movahhedi, Directeur de l'Ecole Doctorale S.T.S ainsi que toute son équipe pour l'aide financière qu'ils m'ont apportée pour finaliser mon travail de thèse.

Je n'oublie pas de remercier Guilhem Castagnos, Pierre-Louis Cayrel et Elsa Bousquet avec qui j'ai partagé le bureau des thésards pendant plus d'une année, pour l'aide précieuse qu'ils m'ont apportée chaque fois que je fais appel à eux dans le domaine de l'informatique.

À l'Association des doctorants, à Moulay Barkatou et son équipe, je les remercie pour tous les bons moments que j'ai passés avec eux pendant les matchs de football au stade de l'université de Limoges.

Mes remerciements vont également au personnel administratif : Patricia Vareille, Yolande Vieceli, Sylvie Laval et Chantal Subileau pour leur disponibilité, leur gentillesse et leur accueil toujours avec le sourire, sans oublier Martine Guerletin, la secrétaire de l'I.R.E.M de Limoges qui m'a aidé, chaque fois que j'en ai eu besoin, à consulter les ouvrages de didactique des mathématiques.

Je remercie mon ami, Doctorant en chimie, Ahmed Shrgawe pour son soutien moral et pour les bons moments que nous avons passés à l'université de Limoges. Comme je tiens à remercier aussi mes amis Boualem Bensebaa et Mohamed Houari, tous deux Doctorants à l'université de Limoges, pour tous les bons moments passés ensemble autour d'un bon café ou d'un bon couscous préparé par Boualem, sans oublier mon ami Abderrahim Hantoute qui est Post-Doc au DMI-Xlim de Limoges.

Enfin, un grand merci à ma femme que j'ai laissée avec les enfants à Alger pendant mes séjours à Limoges. Elle a su m'aider moralement avec beaucoup de patience et de courage.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Notations</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Algèbre des suites</b>	<b>7</b>
1.1 Algèbre topologique des suites . . . . .	8
1.1.1 Définitions . . . . .	8
1.1.2 Base topologique . . . . .	9
1.2 Idempotents de l’algèbre des suites . . . . .	11
1.3 Endomorphismes continus de l’algèbre des suites . . . . .	12
<b>2 Algèbre des suites récurrentes linéaires</b>	<b>17</b>
2.1 Généralités . . . . .	18
2.2 Quelques propriétés des suites récurrentes linéaires . . . . .	21
2.2.1 Algèbre de Hadamard rationnelle . . . . .	21
2.2.2 Terme général d’une suite récurrente linéaire . . . . .	24
2.3 Quelques endomorphismes continus . . . . .	28
2.3.1 Résultat préliminaire . . . . .	28
2.3.2 Applications décimation et emboîtement . . . . .	28
<b>3 Application tressage</b>	<b>33</b>
3.1 Définitions . . . . .	34
3.2 Exemples de tressages . . . . .	35
3.3 Caractérisation des tressages bijectifs . . . . .	38
3.4 Composition de tressages . . . . .	42
<b>4 Applications semi-affines</b>	<b>47</b>
4.1 Idempotents de l’algèbre des suites récurrentes linéaires . . . . .	49
4.2 Applications semi-affines . . . . .	51
4.2.1 Définitions et notations . . . . .	51
4.2.2 Caractérisation des applications semi-affines . . . . .	52
4.2.3 Propriétés . . . . .	56
4.3 Quelques lemmes . . . . .	58
4.4 Endomorphismes continus des suites récurrentes linéaires . . . . .	60

4.5 Exemples . . . . .	64
<b>Bibliographie</b>	<b>67</b>

# Notations

$A$	Anneau commutatif unitaire
$A^*$	Groupe des éléments inversibles de l'anneau $A$
$A[x]$	Algèbre des polynômes en la variable $x$
$A[[x]]$	Algèbre des séries formelles à coefficients dans $A$
$S_I(A)$	Algèbre des suites indexées par $I$ , à valeurs dans $A$
$u \odot v$	Produit de Hadamard des suites $u$ et $v$
$\chi_N$	Indicatrice de l'ensemble $N$
$\text{Ann}_{A[x]}(u)$	L'idéal annulateur de la suite $u$ dans l'anneau $A[x]$
$f \odot g$	Produit de Hadamard des séries $f$ et $g$
$\text{End}^c(S_I(A))$	Ensemble des endomorphismes continus de l'algèbre $S_I(A)$
$\text{Aut}^c(S_I(A))$	Ensemble des automorphismes continus de l'algèbre $S_I(A)$
$\mathbb{M}_h(A)$	Algèbre des matrices carrées d'ordre $h$ sur $A$
$\mathbb{M}_{h,r}(A)$	Algèbre des matrices $h \times r$ sur $A$
$S_{\mathbb{N}}(A) = S(A)$	Algèbre des suites indexées par $\mathbb{N}$ , à valeurs dans $A$
$r(A)$	Algèbre des suites récurrentes linéaires à coefficients et à valeurs dans $A$
$K$	Corps commutatif de caractéristique nulle
$r_\alpha(K)$	Ensemble des suites $u$ de $r(K)$ telles que $u(n) = p(n)\alpha^n$ , $\alpha \in K^*$ , $p \in K[x]$
$Z(K)$	Ensemble des suites de $r(K)$ nulles à partir d'un certain rang
$f_u$	Série génératrice de la suite $u$
$Tu$	La suite $(u(n+1))_{n \geq 0}$
$\phi_d u$	La suite $(u(dn))_{n \geq 0}$
$E_d(u_0, \dots, u_{d-1})$	Emboîtement des suites $u_0, \dots, u_{d-1}$
$\psi_{d,J,\sigma}$	Tressage
$\psi_{d,\sigma}$	Tressage bijectif
$\varphi_{(d,a,b,c,t)}$	Application semi-affine
$\Phi$	Ensemble des applications semi-affines
$\Phi_0$	Ensemble des applications purement semi-affines.





# Introduction

Une des plus célèbres et sans doute la plus ancienne suite récurrente linéaire est la suite (1,1,2,3,5,8,13...) qui « compte » le nombre de couples de lapins enfermés dans un enclos et qui figure dans le *Liber Abaci* (1202) de Léonard de Pise (dit Fibonacci). On trouvera ensuite les suites récurrentes linéaires chez des mathématiciens de la fin du XVI<sup>e</sup> siècle jusqu'à nous jours. C'est à Édouard Lucas au XIX<sup>e</sup> siècle qu'on doit le nom donné à cette suite « série de Fibonacci » ainsi que sa popularisation.

L'âge des suites récurrentes linéaires, la diversité de leurs champs d'application en font un sujet tellement vaste et si riche en résultats qu'il faudrait plusieurs ouvrages, en plus de ceux qui existent déjà, pour faire le tour de toutes leurs propriétés. Elles ont été étudiées d'abord sur le corps des entiers rationnels puis sur un corps quelconque de caractéristique nulle. L'étude de telles suites fait l'objet d'une littérature abondante, et il serait long de réaliser une bibliographie complète du sujet. Nous renvoyons cependant à l'ouvrage collectif [11] qui contient une mine de résultats et de références.

Voici une liste, sans doute incomplète, de sujets importants où interviennent les suites récurrentes linéaires.

En informatique, les suites récurrentes linéaires interviennent dans divers domaines théoriques ou pratiques. Elles apparaissent d'abord comme un objet fondamental en théorie des langages ; elles interviennent directement dans l'étude des morphismes itérés sur un monoïde (DOL-systems...voir [6]) et la théorie des séries rationnelles en variables non commutatives - sujet fondé essentiellement par M.-P.-Schützenberger - en est une généralisation naturelle et féconde (voir [7]).

L'étude des suites récurrentes linéaires à valeurs dans un corps fini est un problème essentiel dans le domaine des communications (voir [13], de la théorie des codes correcteurs et de la cryptographie. Signalons par exemple, la correspondance entre ces suites et les registres à décalage (shift-registers) qui sont des systèmes bien pratiques à la fois pour la génération des suites de nombres pseudo-aléatoires et aussi le chiffrement dit « disque jetable ».

Autre exemple bien connu, les réduites du développement en fraction continue des irrationnels quadratiques ont des numérateurs et des dénominateurs qui sont les termes de suites récurrentes linéaires, ainsi les dénominateurs de la suite des réduites du développement du nombre d'or  $(1 + \sqrt{5})/2$  sont les nombres de Fibonacci.

Comme il est expliqué en [17], on peut aussi utiliser les suites récurrentes linéaires pour construire des algorithmes en théorie algébrique des nombres, c'est un peu la version arithmétique des algorithmes d'analyse numérique où les suites récurrentes linéaires sont utilisées pour obtenir des informations sur les racines d'un polynôme ; pour un exposé très précis des algorithmes algébriques sur les polynômes, voir le livre de Knuth « The Art of Programming, Addison esley ». On trouvera dans [18] un exemple pour décomposer un polynôme  $P$  en fac-

teurs linéaires dans un corps  $\mathbb{F}_q$  fini ; la méthode banale consistant à calculer les valeurs de  $P(x)$  pour  $x$  parcourant  $\mathbb{F}_q$  nécessite près de  $q$  opérations, mais en calculant l'ordre de la matrice compagnon de  $P$ , on peut répondre à la question en  $O(\log q)$  opérations.

Édouard Lucas a écrit :

« La théorie des suites récurrentes est une mine inépuisable qui renferme toutes les propriétés des nombres ; en calculant les termes consécutifs de telles suites, en décomposant ceux-ci en facteurs, en recherchant par l'expérimentation la loi de l'apparition et de la reproduction des nombres premiers, on fera progresser d'une manière systématique l'étude des propriétés des nombres et de leurs applications dans toutes les branches des mathématiques. »

Dans ce travail, nous nous intéressons aux endomorphismes de l'ensemble de suites récurrentes linéaires à coefficients et à valeurs dans un anneau commutatif unitaire en tant qu'algèbre et en particulier nous caractérisons ceux qui sont continus dans le cas d'un corps commutatif de caractéristique nulle.

Les résultats de cette thèse ont fait l'objet d'un article. Certains se généralisent à l'algèbre des suites récurrentes linéaires à coefficients polynomiaux comme nous le montrerons dans un article en cours de rédaction.

## Chapitre 1

Dans ce premier chapitre, nous nous intéressons aux endomorphismes de l'algèbre de Hadamard des suites en général.

Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire et  $I$  un ensemble non vide d'indices. On note  $S_I(A)$  l'ensemble des applications de  $I$  dans  $A$ . Puisque l'ensemble  $I$  sera principalement l'ensemble des entiers naturels, on utilisera la terminologie des suites pour désigner les éléments de l'ensemble  $S_I(A)$ . Muni de l'addition usuelle des suites, de la multiplication usuelle par les scalaires et du produit de Hadamard « student product », l'ensemble  $S_I(A)$  est alors une  $A$ -algèbre, appelée algèbre de Hadamard.

Dans la première section, nous introduisons la topologie produit sur cette algèbre, à savoir, la topologie la moins fine qui rend continues les « projections », c'est-à-dire, les applications  $\pi_i, i \in I$ , données par :

$$\forall u \in S_I(A), \quad \pi_i(u) = u(i).$$

Après avoir montré que l'algèbre  $S_I(A)$  est complète pour cette topologie, nous explicitons une base topologique de l'algèbre de Hadamard  $S_I(A)$ . Dans la deuxième section, en supposant l'anneau  $A$  intègre, nous caractérisons les idempotents de l'algèbre  $S_I(A)$ .

Enfin, dans la troisième section, nous caractérisons les endomorphismes continus de l'algèbre de Hadamard  $S_I(A)$  en montrant que tout endomorphisme continu de l'algèbre des suites est donné par substitution à l'indice  $i$  d'un indice  $\varphi(i)$ , où  $\varphi$  est une application fixée de  $I$  dans  $I$ .

## Chapitre 2

Dans ce deuxième chapitre, nous supposons, de plus, que l'anneau  $A$  est intègre. Nous nous plaçons dans le cas où  $I = \mathbb{N}$  et notons simplement  $S(A) = S_{\mathbb{N}}(A)$ .

Dans la première section, nous donnons des généralités sur l'algèbre de Hadamard des séries

formelles à coefficients dans  $A$ . Nous rappelons la définition classique d'une suite récurrente linéaire sur  $A$ . Lorsque  $A = K$  est un corps commutatif, nous la définissons, grâce à l'application décalage  $T$ , comme étant un élément de  $S(K)$  dont l'annulateur dans  $K[T]$  n'est pas trivial. Nous donnons ensuite d'autres caractérisations connues d'une suite récurrente linéaire sur l'anneau  $A$ . Comme dans [4], l'ensemble des suites récurrentes linéaires sur  $A$  (ou à coefficients dans  $A$ ) et à valeurs dans  $A$  est noté  $r(A)$ .

Dans la deuxième section, nous donnons quelques propriétés des suites récurrentes linéaires. Nous rappelons que l'ensemble  $r(A)$  est une sous-algèbre de  $S(A)$ , appelée *algèbre de Hadamard rationnelle*. Après avoir donné un exemple fondamental (voir proposition 2.2.1.2) de suite récurrente linéaire sur  $A$ , nous traitons de l'analogue du lemme de Fatou (proposition 2.2.1.3). À la fin de cette section, nous rappelons la caractérisation d'une suite de  $r(K)$  lorsque  $K$  est un corps commutatif de caractéristique nulle (voir proposition 2.2.1.1). Nous montrons ensuite que l'algèbre de Hadamard rationnelle  $r(A)$  se décompose en somme directe des espaces vectoriels suivants :

$$r_\alpha(K) = \{u \in r(K), \exists p \in K[x], \forall n \geq 0, u(n) = p(n)\alpha^n\},$$

$$Z(K) = \{u \in r(K), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u(n) = 0\}.$$

Dans la troisième section, après avoir donné un exemple d'endomorphisme continu de l'algèbre  $r(A)$ , à savoir le décalage  $T$ , nous définissons l'application décimation notée  $\phi_{d,j}$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq j < d$ , et l'application emboîtement notée  $E_d$ . Nous montrons, dans le théorème 2.2.1.2, que si  $u$  est une suite récurrente linéaire sur  $A$  alors la suite  $\phi_{d,j}u$ , appelée *décimée* de  $u$ , est aussi récurrente linéaire sur  $A$  et que le  $d$ -emboîtement  $E_d$  renvoie  $r(K)^d$  sur  $r(K)$ . Cela nous permet de montrer que la décimation  $\phi_{d,j}u$  est un endomorphisme continu de l'algèbre de Hadamard rationnelle  $r(A)$ .

### Chapitre 3

Dans ce troisième chapitre, nous introduisons la notion de *tressage* et nous donnons un endomorphisme continu de l'algèbre de Hadamard rationnelle  $r(A)$  qui n'est pas connu.

Dans la première section, nous commençons par définir les applications  $\Delta_d$ ,  $\Sigma_\sigma$  et  $T_J$ , où  $d$  est un entier naturel non nul,  $\sigma$  est une permutation de l'ensemble  $\{0, \dots, d-1\}$  et  $J$  est un  $d$ -uplet d'entiers naturels; et à partir de ces applications et de l'application emboîtement  $E_d$ , nous définissons l'application *tressage* qui consiste grossomodo à décimer une suite puis à emboîter ses  $d$ -décimées.

Dans la deuxième section, nous donnons un exemple pour dire pourquoi le terme *tressage* a été choisi pour illustrer ces applications. Après avoir montré que l'image, par un *tressage*, d'une suite récurrente linéaire est aussi une suite récurrente linéaire, nous montrons que le *tressage* est un endomorphisme continu de l'algèbre de Hadamard  $r(A)$ .

Dans la troisième section, nous donnons une caractérisation des *tressages* bijectifs et nous montrons que l'ensemble des *tressages* bijectifs est un sous-groupe du groupe des automorphismes bicontinus de l'algèbre  $r(A)$ .

Enfin, dans la quatrième section, après avoir donné et démontré deux lemmes préliminaires, (lemme 3.4.0.9 et lemme 3.4.0.10), nous montrons que le produit de deux *tressages* est aussi un *tressage*.

## Chapitre 4

Dans ce quatrième chapitre, nous nous proposons de décrire complètement les endomorphismes continus de l'algèbre des suites récurrentes linéaires autrement nommée l'algèbre de Hadamard rationnelle  $r(K)$ , lorsque  $K$  est un corps commutatif de caractéristique nulle.

Dans la première section, nous caractérisons les idempotents de l'algèbre de Hadamard rationnelle  $r(K)$ , par analogie avec ceux de l'algèbre des suites.

Dans la deuxième section, nous définissons des applications semi-affines  $\varphi_{(d,a,b,c,t)}$  de  $\mathbb{N}$  dans lui-même. Nous notons  $\Phi$  l'ensemble de ces applications semi-affines et nous montrons que pour que  $\varphi$  soit un élément de l'ensemble  $\Phi$  il faut et il suffit que  $\varphi$  vérifie une certaine relation de récurrence (voir proposition 4.2.2.1). Ensuite, nous montrons que l'ensemble  $\Phi$  est un sous-monoïde du monoïde de toutes les applications de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ . La proposition 4.2.3.1 montre que si  $u$ , à valeurs dans l'anneau commutatif unitaire  $A$ , est une suite récurrente linéaire et que  $\varphi$  est dans l'ensemble  $\Phi$  alors la suite  $u \circ \varphi$  est une suite récurrente linéaire.

Dans la troisième section, nous donnons quelques résultats préliminaires (voir lemme 4.3.0.2 et lemme 4.3.0.3) qui nous sont utiles pour caractériser les endomorphismes continus de l'algèbre de Hadamard rationnelle  $r(K)$ .

Dans la quatrième section, nous caractérisons les endomorphismes continus de  $r(K)$ . Plus précisément, nous montrons (voir théorème 4.4.0.2) que ces endomorphismes continus sont obtenus par substitution à l'indice  $n \in \mathbb{N}$  d'un indice  $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ , où la suite  $(\varphi(n))_{n \geq 0}$  est un emboîtement de progressions arithmétiques.

Enfin, dans la cinquième section, nous donnons quelques exemples qui montrent que tout endomorphisme continu de  $r(K)$  provient d'une application semi-affine. Ensuite, nous donnons un exemple d'endomorphisme de  $r(K)$  non continu.

# Chapitre 1

## Algèbre des suites

Dans ce premier chapitre, nous considérons un anneau commutatif unitaire  $A$  et un ensemble non vide quelconque  $I$ . Muni de l'addition usuelle des suites et du produit de Hadamard, l'ensemble  $S_I(A)$  est alors une  $A$ -algèbre. Puis nous construisons l'algèbre produit  $S_I(A) = A^I$ , que nous munissons de la topologie la moins fine qui rend continues les applications  $\pi_i, (i \in I)$ , données par :

$$\forall u \in S_I(A), \quad \pi_i(u) = u(i).$$

Après avoir montré que l'algèbre  $S_I(A)$  est complète pour cette topologie (voir le corollaire 1.1.2.1), nous en explicitons une base topologique (voir la proposition 1.1.2.3). Ensuite, nous caractérisons les idempotents de l'algèbre  $S_I(A)$ ; ainsi nous montrons, dans la proposition 1.2.0.4, que pour qu'un élément de l'algèbre  $S_I(A)$  soit un idempotent il faut et il suffit qu'il existe une partie  $N$  de  $I$  dont elle soit l'indicatrice.

Après avoir rappelé quelques propriétés de la fonction *indicatrice*, nous caractérisons les endomorphismes continus de l'algèbre  $S_I(A)$ , (voir proposition 1.3.0.5 et théorème 1.3.0.1).

Enfin, le corollaire 1.3.0.3 montre que tout automorphisme continu de  $S_I(A)$  est bicontinu et que le groupe des automorphismes bicontinus de  $S_I(A)$  est isomorphe au groupe opposé du groupe de toutes les permutations de  $I$ .

## 1.1 Algèbre topologique des suites

### 1.1.1 Définitions

Dans cette section, on fixe un anneau commutatif unitaire  $A$ , dont l'unité est noté  $1$ , et un ensemble non vide quelconque  $I$  dont les éléments sont appelés *indices*.

Soit  $S_I(A)$  l'ensemble des suites  $u = (u(i))_{i \in I}$  d'éléments de  $A$  indexés par  $I$ , c'est-à-dire des applications de  $I$  dans  $A$ . L'ensemble  $S_I(A)$  est simplement le produit cartésien  $A^I$  de la famille  $(A_i)_{i \in I}$ , avec  $A_i = A$  pour tout  $i \in I$ . Puisque chaque facteur de ce produit cartésien est muni d'une structure d'anneau, alors  $S_I(A)$  peut être naturellement muni d'une structure d'anneau. Le produit ainsi défini sur  $S_I(A)$  est appelé *produit de Hadamard*, en d'autres termes on a la définition suivante :

#### Définition 1.1.1.1

Soit  $u = (u(i))_{i \in I}$  et  $v = (v(i))_{i \in I}$  deux suites de  $S_I(A)$ .

Le produit de Hadamard des suites  $u$  et  $v$  est la suite  $w = u \odot v$  définie par :

$$\forall i \in I, \quad w(i) = u(i)v(i).$$

Notons que nous pouvons identifier  $A$  à un sous-anneau de  $S_I(A)$  par le truchement de l'injection  $k \mapsto (k_i = k)_{i \in I}$ . Muni de l'addition terme à terme et du produit de Hadamard,  $S_I(A)$  devient une  $A$ -algèbre unitaire d'élément unité  $1_{S(A)} = (1, 1, \dots, 1, \dots)$ .

#### Définition 1.1.1.2

La  $A$ -algèbre ainsi définie ci-dessus est appelée *l'algèbre de Hadamard des suites*.

Pour tout indice  $i$  dans  $I$ , soit  $\pi_i$  l'application de  $S_I(A)$  dans  $A$ , définie par :

$$\forall u \in S_I(A), \quad \pi_i(u) = u(i).$$

L'application  $\pi_i$  est un morphisme de  $A$ -algèbres. Si on considère  $A$  comme un espace topologique discret, alors se trouve définie sur  $S_I(A) = A^I$  une topologie produit. Rappelons que cette topologie produit est la topologie la moins fine qui rend continues toutes les applications  $\pi_i, i \in I$ , de sorte qu'une base d'ouverts de  $S_I(A)$  est constituée par les parties de la forme

$$\bigcap_{j=1}^d \pi_{n_j}^{-1}(\{a_j\}),$$

où  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $\forall j \in \{1, \dots, d\}, a_j \in A, n_j \in I$ .

Il est clair que l'on a, pour  $a_1, \dots, a_d$  dans  $A$  :

$$u \in \bigcap_{j=1}^d \pi_{n_j}^{-1}(\{a_j\}) \quad \Leftrightarrow \quad \forall j \in \{1, \dots, d\}, u(n_j) = a_j.$$

Cette topologie est évidemment compatible avec les opérations algébriques de  $S_I(A)$  qui devient de ce fait une  $A$ -algèbre topologique.

### 1.1.2 Base topologique

Rappelons qu'un ensemble  $E$  est dit préordonné s'il est muni d'une relation, notée  $\leq$ , qui soit réflexive et transitive. L'ensemble préordonné  $E$  est dit filtrant (à droite) s'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall e \in E, \forall e' \in E, \exists e'' \in E / e \leq e'', e' \leq e''.$$

#### Proposition 1.1.2.1

Soit  $(E, \leq)$  un ensemble préordonné filtrant,  $(u^p)_{p \in E}$  une suite généralisée d'éléments de

$S_I(A)$  et  $u$  un élément de  $S_I(A)$ . La suite généralisée  $(u^p)_{p \in E}$  converge vers  $u$  dans l'algèbre

topologique  $S_I(A)$  si et seulement si pour tout  $i \in I$ , il existe un élément  $p_0(i)$  de  $E$

tel que  $u^p(i) = u(i)$  pour tout  $p \geq p_0(i)$ .

#### Démonstration

Supposons que  $(u^p)_{p \in E}$  converge vers  $u$  et fixons  $i$  dans  $I$ .

L'ensemble  $V = \pi_i^{-1}(\{u(i)\})$ ,  $i \in I$ , est un voisinage de la suite  $u$  dans  $S_I(A)$ ; en appliquant l'hypothèse, on a :

$$\exists p_0(i) \in E / \forall p \geq p_0(i), u^p \in V,$$

i.e.,

$$\forall p \geq p_0(i), u^p(i) = u(i).$$

Réciproquement, il s'agit de montrer qu'étant donné  $V$  un voisinage quelconque de  $u$ , il existe  $q_0 \in E$  tel que  $u^p \in V$ , pour  $p \geq q_0$ . Or  $V$  contient un voisinage de la suite  $u$  de la forme :

$$\bigcap_{j=1}^d \pi_{n_j}^{-1}(\{u(n_j)\}),$$

où  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $\forall j \in \{1, \dots, d\}$ ,  $n_j \in I$ .

Par l'hypothèse, on peut écrire :

$$\forall j \in \{1, \dots, d\}, \exists p_j = p(n_j) \in E / \forall p \geq p_j, u^p(n_j) = u(n_j).$$

Puisque l'ensemble  $E$  est filtrant, il existe alors  $q_0 \in E$  tel que :

$$\forall j \in \{1, \dots, d\}, p_j \leq q_0.$$

On a alors :

$$\forall p \geq q_0, u^p(n_j) = u(n_j)$$

pour tout indice  $j \in \{1, \dots, d\}$ , c'est-à-dire que  $u^p \in V$  dès que  $p \geq q_0$ .

□

**Proposition 1.1.2.2**

Soit  $(E, \leq)$  un ensemble préordonné filtrant et  $(u^p)_{p \in E}$  une suite généralisée d'éléments de  $S_I(A)$ . Si, dans l'algèbre topologique  $S_I(A)$ , la suite  $(u^p)_{p \in E}$  est de Cauchy alors elle est convergente.

**Démonstration**

Soit  $(u^p)_{p \in E}$  une suite de Cauchy dans  $S_I(A)$ , c'est-à-dire que pour toute partie finie  $F$  de  $I$ , il existe  $p_0 \in E$  tel que, pour tout  $(p, q) \in E \times E$ , on a :

$$(p \geq p_0, q \geq p_0) \Rightarrow (\forall i \in F, u^p(i) = u^q(i)). \quad (1.1)$$

Fixons  $i$  dans  $I$  et prenons  $F = \{i\}$ .

Il existe alors  $p_0(i) = p_0 \in E$  tel que, pour tout  $(p, q) \in E \times E$ , l'implication (1.1) est vérifiée.

On définit une suite  $u$  de  $S_I(A)$  par :

$$\forall i \in I, \quad u(i) = u^{p_0}(i).$$

Par suite, pour tout  $p \in E$ , on a :

$$(p \geq p_0) \Rightarrow (u^p(i) = u^{p_0}(i)),$$

ce qui montre, en vertu de la proposition 1.1.2.1, que la suite  $u^p$  converge vers la suite  $u$ . □

De cette proposition, on déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 1.1.2.1**

La  $A$ -algèbre  $S_I(A)$  est complète.

On aurait pu employer aussi, pour montrer ce corollaire, le résultat démontré par exemple dans [10] en vertu duquel un produit d'espaces uniformes complets est complet.

Puisque  $A$  est isomorphe à un sous-anneau de  $S_I(A)$ , on peut munir  $S_I(A)$  d'une structure de  $A$ -module. Nous allons introduire une famille  $(\delta_j)_{j \in I}$  d'éléments de  $S_I(A)$  qui est base topologique du  $A$ -module  $S_I(A)$ . Une telle famille sera appelée *base topologique* de l'algèbre  $S_I(A)$ .

Soit  $j \in I$ . Définissons la suite  $\delta_j = (\delta_j(i))_{i \in I}$  de  $S_I(A)$  en posant :

$$\forall i \in I, \quad \delta_j(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Proposition 1.1.2.3**

La famille  $(\delta_j)_{j \in I}$  est une base topologique de l'algèbre de Hadamard des suites indexées par  $I$  à valeurs dans  $A$ .

**Démonstration**

Pour toute suite  $u$  dans  $S_I(A)$  et tout indice  $i$  dans  $I$ , on a évidemment, dans l'algèbre topologique  $S_I(A)$ , en vertu de la proposition 1.1.2.1 :

$$u(i) = \lim_{F \in E} \sum_{j \in F} u(j) \delta_j(i),$$



où  $E$  est l'ensemble préordonné filtrant des parties finies de l'ensemble  $I$ .

D'où, dans l'algèbre topologique  $S_I(A)$ , on a :  $u = \sum_{j \in F} u(j)\delta_j$ .

D'autre part, si une combinaison linéaire  $\sum_{j \in F} u(j)\delta_j$  est nulle dans  $S_I(A)$ , alors c'est une suite qui prend en tout entier la valeur zéro, donc tous les coefficients  $u(j)$  sont nuls. □

## 1.2 Idempotents de l'algèbre des suites

Nous avons besoin de décrire les idempotents de  $S_I(A)$  afin de donner une caractérisation des endomorphismes continus de cette algèbre de Hadamard.

Étant donnée une partie quelconque  $N$  de  $I$ , on lui associe son *indicatrice*  $\chi_N \in S_I(A)$  définie par :

$$\forall i \in I, \chi_N(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### Proposition 1.2.0.4

*Soit  $A$  un anneau unitaire intègre. Une suite  $u$  de l'algèbre de Hadamard  $S_I(A)$  est un idempotent si et seulement s'il existe une partie  $N$  de  $I$  dont elle est l'indicatrice.*

### Démonstration

Supposons que  $u$  est un idempotent de  $S_I(A)$ . On a alors :

$$u^2 = u.$$

Donc pour tout  $i \in I$ , on a :

$$u(i)[u(i) - 1] = 0,$$

d'où

$$u(i) \in \{0, 1\},$$

on choisit alors

$$N = \{i \in I, u(i) = 1\},$$

de sorte que  $u = \chi_N$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe  $N \subseteq I$  telle que  $u = \chi_N$ .

On a alors pour tout  $i \in I$  :

$$(u^2 - u)(i) = 0$$

D'où pour tout  $i \in I$ , on a :

$$u^2(i) = u(i)$$

par suite, on obtient :

$$u^2 = u,$$

ce qui montre que la suite  $u$  est un idempotent de  $S_I(A)$ . □

Rappelons ci-dessous quelques propriétés qui découlent de la définition de la fonction indicatrice et qui nous seront utiles pour démontrer le théorème 1.3.0.1 qui caractérise les endomorphismes continus de l'algèbre  $S_I(A)$ .

**Lemme 1.2.0.1**

Soit  $N, N_1, N_2$  des parties quelconques de  $I$ , alors :

1.  $\chi_N = 0 \Leftrightarrow N = \emptyset$ ,
2.  $\chi_N = 1 \Leftrightarrow N = I$ ,
3.  $\chi_{N_1} \odot \chi_{N_2} = \chi_{N_1 \cap N_2}$ ,
4. Si  $N_1 \cap N_2 = \emptyset$  alors  $\chi_{N_1} + \chi_{N_2} = \chi_{N_1 \cup N_2}$ ,

De la proposition 1.1.2.1 et du lemme 1.2.0.1, on déduit le lemme suivant :

**Lemme 1.2.0.2**

Soit  $(N_x)_{x \in X}$  une famille de parties de l'ensemble  $I$ . Si les termes de la famille de parties

$(N_x)_{x \in X}$  sont deux à deux disjoints, alors la suite généralisée  $(S_y)_y$  indexée par les parties

finies de l'ensemble d'indices  $X$  définie par  $S_y = \sum_{x \in y} \chi_{N_x}$  converge dans  $S_I(A)$  et sa limite est  $\chi_{\cup_{x \in X} N_x}$ .

## 1.3 Endomorphismes continus de l'algèbre des suites

**Définition 1.3.0.1**

On appelle endomorphisme de l'algèbre de Hadamard des suites, tout endomorphisme  $f$  du  $A$ -module  $S_I(A)$  tel que :

- 1-  $f(1_{S_I(A)}) = 1_{S_I(A)}$
- 2-  $\forall u \in S_I(A), \forall v \in S_I(A) \quad f(u \odot v) = f(u) \odot f(v)$ .

**Proposition 1.3.0.5**

Soit  $A$  un anneau unitaire intègre et  $I$  un ensemble non vide. Si  $\varphi$  est une application de  $I$  dans  $I$ , alors l'application  $f_\varphi$  définie de  $S_I(A)$  dans  $S_I(A)$  par :

$$\forall u \in S_I(A), \quad f_\varphi(u) = u \circ \varphi,$$

est un endomorphisme continu de l'algèbre de Hadamard  $S_I(A)$ .

**Démonstration**

Supposons qu'il existe une application  $\varphi$  de  $I$  dans  $I$  telle que l'application  $f_\varphi$  de  $S_I(A)$  dans lui-même est définie par  $f_\varphi(u) = u \circ \varphi$ . On vérifie immédiatement que  $f_\varphi$  est un endomorphisme de l'algèbre de Hadamard  $S_I(A)$ . Pour montrer que  $f_\varphi$  est continue, il suffit de montrer que l'application  $\pi_i \circ f_\varphi$  est continue pour tout  $i \in I$ .

On a alors pour tout  $u$  dans  $S_I(A)$  et tout  $i \in I$  :

$$\begin{aligned}
 (\pi_i \circ f_\varphi)(u) &= \pi_i(f_\varphi(u)) \\
 &= \pi_i(u \circ \varphi) \\
 &= (u \circ \varphi)(i) \\
 &= u(\varphi(i)) \\
 &= \pi_{\varphi(i)}(u).
 \end{aligned}$$

Donc  $\pi_i \circ f_\varphi = \pi_{\varphi(i)}$  qui est continue.

□

**Théorème 1.3.0.1**

Soit  $A$  un anneau unitaire intègre,  $I$  un ensemble non vide et  $R$  une sous-algèbre de l'algèbre de Hadamard  $S_I(A)$  telle que  $R$  contient les  $\delta_j, j \in I$ . Soit  $f$  un endomorphisme de  $R$  continu pour la topologie induite de celle de  $S_I(A)$ . Alors il existe une application  $\varphi$  de  $I$  dans  $I$  telle que  $f$  soit la restriction de  $f_\varphi$  à  $R$ .

**Démonstration** Soit  $f$  un endomorphisme continu de l'algèbre de Hadamard  $S_I(A)$ . Pour tout  $j \in I$ , comme  $\delta_j$  est un idempotent de  $S_I(A)$ , il en est de même de  $f(\delta_j)$ . D'après la proposition 1.2.0.4, il existe une partie  $N_j$  de  $I$  telle que :

$$f(\delta_j) = \chi_{N_j}.$$

Soit  $i$  et  $j$  dans  $I$  tels que  $i \neq j$ . En utilisant le (3) du lemme 1.2.0.1, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \chi_{N_i \cap N_j} &= \chi_{N_i} \odot \chi_{N_j} \\
 &= f(\delta_i) \odot f(\delta_j) \\
 &= f(\delta_i \odot \delta_j) \\
 &= f(0) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

D'après le (2) du lemme 1.2.0.1, on déduit que :  $N_i \cap N_j = \emptyset$ .

De plus, on sait que dans l'algèbre topologique  $S_I(A)$ , on a :

$$1 = \lim_y \sum_{j \in y} \delta_j,$$

où  $y$  parcourt l'ensemble préordonné filtrant des parties finies de l'ensemble  $I$ .  
D'où, par continuité et additivité de  $f$ , les relations :

$$\begin{aligned} 1 &= f(1) \\ &= \lim_y \sum_{j \in y} f(\delta_j) \\ &= \lim_y \sum_{j \in y} \chi_{N_j}. \end{aligned}$$

Comme on sait que les parties  $N_j$  sont deux à deux disjointes, on est en position d'utiliser le lemme 1.2.0.2, et on obtient :

$$1 = \chi_{\cup_{j \in I} N_j},$$

ce qui donne, d'après le (2) du lemme 1.2.0.1 :

$$\cup_{j \in I} N_j = I.$$

On déduit de tout ceci que la famille  $(N_j)_{j \in I}$  forme une partition de l'ensemble  $I$ .

Soit maintenant  $i \in I$ ; il existe alors un unique  $\varphi(i)$  dans  $I$  tel que  $i$  soit dans  $N_{\varphi(i)}$ , ce qui définit une application  $\varphi$  de  $I$  dans  $I$ .

Pour tout  $u \in S_I(K)$  et tout  $i \in I$ , on vérifie alors qu'on a bien :

$$\begin{aligned} (f(u))(i) &= (f(\lim_y \sum_{j \in y} \delta_j u(j)))(i) \\ &= \lim_y \sum_{j \in y} f(\delta_j u(j))(i) \\ &= \lim_y \sum_{j \in y} u(j) (f(\delta_j))(i) \\ &= \lim_y \sum_{j \in y} u(j) \chi_{N_j}(i) \\ &= u(\varphi(i)) \\ &= (f_\varphi(u))(i). \end{aligned}$$

comme on le désirait.

□

**Corollaire 1.3.0.2**

Si  $A$  est un anneau intègre et  $I$  un ensemble non vide alors le monoïde  $End^c(S_I(A))$  des endomorphismes continus de l'algèbre de Hadamard des suites à coefficients dans  $A$  indexées par  $I$  est isomorphe à l'opposé du monoïde de toutes les applications de  $I$  dans  $I$ .

**Démonstration**

l'antimorphisme de  $I^I$  dans  $End^c(S_I(A))$ , qui à tout  $\varphi \in I^I$  associe l'endomorphisme continu  $u \mapsto u \circ \varphi$ , est un isomorphisme en vertu de la proposition 1.3.0.5 et du théorème 1.3.0.1.  $\square$

**Proposition 1.3.0.6**

Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire intègre et  $I$  un ensemble non vide. Soit  $R$  une sous-algèbre unitaire de l'algèbre de Hadamard  $S_I(A)$  contenant les  $\delta_j, j \in I$ . L'application  $f \mapsto f(id_I)$  est un antimorphisme injectif du monoïde  $End^c(R)$  dans le monoïde des applications de  $I$  dans  $I$ . Son image est l'ensemble des applications  $\varphi : I \rightarrow I$  vérifiant :

$$\forall u \in R, \quad u \circ \varphi \in R. \quad (1.2)$$

**Démonstration**

D'après le théorème 1.3.0.1, si  $f$  est un endomorphisme continu de  $R$ , il existe une application  $\varphi$  de  $I$  dans  $I$  telle que  $f = f_\varphi$ . Alors  $f(id_I) = \varphi$  appartient à  $R$ . D'autre part, si  $f_1$  et  $f_2$  deux endomorphismes continus de  $R$ , il existe alors deux applications  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  de  $I$  dans  $I$  telles que :

$$f_1 = f_{\varphi_1} \quad \text{et} \quad f_2 = f_{\varphi_2},$$

et pour tout  $u$  dans  $R$ , on a :

$$\begin{aligned} f_{\varphi_1 \circ \varphi_2}(u) &= u \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2) \\ &= (u \circ \varphi_1) \circ \varphi_2 \\ &= f_{\varphi_2}(u \circ \varphi_1) \\ &= f_{\varphi_2}(f_{\varphi_1}(u)) \\ &= (f_{\varphi_2} \circ f_{\varphi_1})(u), \end{aligned}$$

par conséquent, on a la relation :

$$f_{\varphi_1 \circ \varphi_2} = f_{\varphi_2} \circ f_{\varphi_1},$$

de sorte que l'application  $f \mapsto f(id_I)$  est un antimorphisme dont l'injectivité est évidente. Réciproquement, on vérifie aisément que, sous l'hypothèse que  $\varphi$  satisfait à la condition (1.2), l'application  $f_\varphi$  détermine un endomorphisme continu de  $R$ .  $\square$

**Corollaire 1.3.0.3**

*Soit  $A$  un anneau unitaire intègre et  $I$  un ensemble non vide.*

1. *Tout automorphisme continu de  $S_I(A)$  est bicontinu.*
2. *Le groupe  $\text{Aut}^c(S_I(A))$  des automorphismes bicontinus de l'algèbre des suites à coefficients dans  $A$  indexées par  $I$  est isomorphe au groupe opposé du groupe de toutes les permutations de  $I$ .*

**Démonstration**

Si  $\varphi \in I^I$  n'est pas une surjection, alors il existe  $i \in I \setminus \varphi(I)$ . On a alors  $\delta_i \circ \varphi = 0$ , de sorte que l'endomorphisme  $u \mapsto u \circ \varphi$  n'est pas injectif.

De même, si  $\varphi \in I^I$  n'est pas une injection, alors il existe deux éléments  $i$  et  $j$  de  $I$ ,  $i \neq j$ , tels que  $\varphi(i) = \varphi(j)$ . Comme il existe des suites  $u \in S_I(A)$  telles que  $u(i) \neq u(j)$ , on voit que l'endomorphisme  $u \mapsto u \circ \varphi$  n'est pas surjectif. Par conséquent, l'endomorphisme continu  $u \mapsto u \circ \varphi$  est un automorphisme si et seulement si  $\varphi$  est une bijection. Dans ce cas, l'automorphisme réciproque  $u \mapsto u \circ \varphi^{-1}$ , est donc continu, ce qui prouve le point 1. Le point 2. résulte immédiatement du corollaire 1.3.0.2.

□

## Chapitre 2

# Algèbre des suites récurrentes linéaires

Dans ce deuxième chapitre, nous supposons, de plus, que l'anneau  $A$  est intègre et nous nous plaçons dans le cas où les indices parcourent l'ensemble des entiers naturels, c'est-à-dire  $I = \mathbb{N}$ ; nous écrivons simplement  $S(A) = S_{\mathbb{N}}(A)$ . Nous commençons par donner quelques généralités sur les suites récurrentes linéaires sur  $A$ , notamment, la définition classique et une caractérisation (voir théorème 2.1.0.2). Comme dans [4], nous notons  $r(A)$  l'ensemble des suites récurrentes linéaires à coefficients et à valeurs dans  $A$  que nous définissons comme l'*algèbre de Hadamard rationnelle*. Lorsque  $K$  est un corps de caractéristique nulle, nous montrons dans la proposition 2.2.1.3 que si  $L$  est une extension de  $K$  alors les suites récurrentes linéaires sur  $L$  à valeurs dans  $K$  sont exactement les suites récurrentes linéaires sur  $K$ . C'est un résultat qui ressemble au lemme de Fatou (voir lemme 2.2.1.1), mais est en fait de nature assez différente. Nous rappelons le théorème 2.2.1.1 qui caractérise les suites récurrentes linéaires à coefficients et à valeurs dans  $K$ . Nous montrons, quand  $K$  est algébriquement clos, que l'algèbre  $r(K)$  est somme directe des sous-ensembles  $r_{\alpha}(K)$  et  $I(K)$  de  $r(K)$ , où  $r_{\alpha}(K)$  est l'ensemble des suites  $u$  dont le terme général s'écrit  $u(n) = p(n)\alpha^n$ ,  $p$  est un polynôme,  $\alpha \in K^*$  et  $I(K)$  est l'ensemble des suites qui sont nulles à partir d'un certain rang. Nous montrons dans la proposition 1.3.0.6 que la description du monoïde  $End^c(r(A))$  se réduit à celle des applications  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que, pour tout  $u \in r(K)$ , on a  $u \circ \varphi \in r(K)$ . Après avoir défini les applications décimation et emboîtement, nous montrons, dans la proposition 2.3.2.1, que la décimation est un endomorphisme continu de l'algèbre de Hadamard  $r(A)$ .

## 2.1 Généralités

Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire et intègre. Une structure supplémentaire de l'algèbre des suites apparait quand l'ensemble des indices est muni d'une opération algébrique qui en fait un monoïde libre. Nous nous plaçons maintenant dans le cas le plus simple où les indices parcourent l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels, et nous notons simplement  $S(A) = S_{\mathbb{N}}(A)$ .

Considérons le  $A$ -module  $A[[x]]$  des séries formelles à coefficients dans  $A$ .

L'application  $f$  de  $S(A)$  dans  $A[[x]]$  qui, à toute suite  $u$ , associe la série  $f_u$ , définie par :

$$f_u(x) = \sum_{n \geq 0} u(n)x^n,$$

est un isomorphisme de  $A$ -modules, pour les opérations usuelles, somme et produit par un scalaire sur les suites et séries. La série  $f_u$  est appelée série génératrice de la suite  $u$ .

### Définition 2.1.0.2

Soit  $f_u(x) = \sum_{n \geq 0} u(n)x^n$  et  $f_v(x) = \sum_{n \geq 0} v(n)x^n$  deux séries formelles à coefficients dans  $A$ .

On appelle produit de Hadamard de  $f_u$  par  $f_v$ , la série formelle, notée  $f_u \odot f_v$ , à coefficients dans  $A$ , définie par :

$$\begin{aligned} (f_u \odot f_v)(x) &= f_{u \odot v}(x) \\ &= \sum_{n \geq 0} (u \odot v)(n)x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} u(n)v(n)x^n. \end{aligned}$$

Si on munit les ensembles  $S(A)$  et  $A[[x]]$  de l'addition usuelle et du produit de Hadamard, on

obtient alors un isomorphisme de  $A$ -algèbres ; on a la définition suivante [5] :

### Définition 2.1.0.3

L'algèbre  $A[[x]]$  ainsi obtenue est appelée l'algèbre de Hadamard des séries formelles.

### Remarque 2.1.0.1

L'élément neutre de l'algèbre  $A[[x]]$  est la série

$$\delta(x) = \sum_{n \geq 0} x^n$$

et si  $A^*$  est le groupe des unités de  $A$  alors celui de  $A[[x]]$  est donné par :

$$(A[[x]])^* = \left\{ \sum_{n \geq 0} u(n)x^n, u(n) \in A^* \right\}.$$



Rappelons la définition classique d'une suite récurrente linéaire à coefficients constants dans l'anneau  $A$  (ou sur  $A$ ) et à valeurs dans  $A$ .

**Définition 2.1.0.4**

Soit  $u$  une suite dans  $S(A)$ . On dit que  $u$  est une suite récurrente linéaire à coefficients constants, dans  $A$ , s'il existe un entier naturel non nul  $h$ , des éléments  $p_0, \dots, p_h$  dans  $A$ ,  $p_h \in A^*$ , vérifiant, la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_h u(n+h) + p_{h-1} u(n+h-1) + \dots + p_0 u(n) = 0. \quad (2.1)$$

Si  $h$  est minimal alors il est appelé longueur de la suite  $u$ . Le polynôme défini par :

$$p_h x^h + p_{h-1} x^{h-1} + \dots + p_1 x + p_0,$$

est appelé polynôme caractéristique de la suite  $u$ .

**Définition 2.1.0.5**

L'application  $T$  de  $S(A)$  dans  $S(A)$  qui, à toute suite  $u$ , associe la suite  $Tu$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (Tu)(n) = u(n+1)$$

est appelée application décalage (ou shift).

**Propriétés du shift**

1. Il est facile de voir que l'on a :

$$\forall u \in S(A), \quad \forall v \in S(A), \quad T(u \odot v) = (Tu) \odot (Tv),$$

de sorte que  $T$  est un endomorphisme de  $A$ -algèbres.

2. Si on désigne, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , par  $T^i$ , le  $i$ ème itéré de  $T$ , alors, pour tout  $u \in S(A)$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (T^i u)(n) = u(n+i). \quad (2.2)$$

**Remarque 2.1.0.2**

On définit sur  $S(A)$  une structure de  $A[x]$ -module par :

$$\forall p(x) = \sum_{i=0}^h p_i x^i \in A[x], \forall u \in S(A), \quad p(x).u = \sum_{i=0}^h p_i T^i u,$$

ce qui se traduit par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (p.u)(n) = \sum_{i=0}^h p_i u(n+i).$$

Cette remarque permet alors de définir autrement les suites récurrentes linéaires sur l'anneau  $A$ . Pour une suite  $u$  dans  $S(A)$ , on désigne par  $Ann_{A[x]}(u)$  l'idéal annulateur de  $u$  dans  $A[x]$ , i.e.,

$$Ann_{K[x]}(u) = \{P \in K[x], P.u = 0\}.$$

On a alors le théorème qui suit :

**Théorème 2.1.0.2**

Soit  $u$  une suite dans  $S(A)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La suite  $u$  est une suite récurrente linéaire à valeurs et à coefficients dans  $A$ .
2. L'idéal  $\text{Ann}_{A[x]}(u)$  contient un polynôme unitaire à coefficient dominant inversible.
3. L'ensemble  $A[x]u$  est un  $A$ -module de type fini.

**Démonstration**

L'équivalence entre (1) et (2) découle immédiatement des définitions de la suite récurrente linéaire  $u$  et de son idéal annulateur dans  $A[x]$ . Pour l'équivalence entre (2) et (3), on peut voir dans [20] ou [14]. □

**Notation**

Comme dans [4], l'ensemble des suites récurrentes linéaires à coefficients dans  $A$  (ou sur  $A$ ) et à valeurs dans  $A$  est noté  $r(A)$ .

**Remarques 2.1.0.1**

1. Les polynômes à coefficient dominant inversible, éléments de l'idéal  $\text{Ann}_{A[x]}(u)$ , sont les polynômes caractéristiques de la suite  $u$ .
2. Supposons que  $A = K$  est un corps commutatif. Soit  $u$  une suite dans  $S(K)$ . L'annulateur de  $u$  dans  $K[x]$  est un idéal de l'anneau  $K[x]$ . S'il est non nul, soit  $P_u$  son générateur non nul (normalisé en le prenant unitaire) :

$$P_u = x^h + p_{h-1}x^{h-1} + \cdots + p_0,$$

alors

$$P_u \cdot u = 0,$$

ce qui est équivalent à :

$$\forall n \geq 0, \quad (P_u \cdot u)(n) = 0,$$

et on retrouve la définition classique d'une suite récurrente linéaire (voir [4] ou [8]) :

$$\forall n \geq 0, \quad u(n+h) + p_{h-1}u(n+h-1) + \cdots + p_0u(n) = 0.$$

En d'autres termes, on peut définir l'ensemble des suites récurrentes linéaires à coefficients et à valeurs dans  $K$  comme suit :

**Définition 2.1.0.6**

$$r(K) = \{u \in S(K), \text{Ann}_{K[x]}(u) \neq (0)\}.$$

**Exemples de suites récurrentes linéaires**

1. La suite récurrente linéaire de Fibonacci, à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , est d'ordre  $h = 2$  et est définie par :

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

$$\forall n \geq 0, \quad u(n+2) = u(n+1) + u(n)$$

son polynôme caractéristique est  $P(x) = x^2 - x - 1 \in \mathbb{Z}[x]$ .

2. Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire,  $M$  un  $A$ -module de type fini,  $\phi$  un endomorphisme de  $M$  et  $x$  un élément quelconque de  $M$ . Soit, comme dans [20],  $u$  une suite de  $S(M)$  définie par :

$$u(0) = x \quad \text{et} \quad u(n+1) = \phi(u(n)), \quad \forall n \geq 0.$$

La suite  $u$  est une suite récurrente linéaire. En effet, comme  $M$  est de type fini, alors  $\phi$  vérifie une équation de la forme :

$$\phi^h - a_1\phi^{h-1} - \dots - a_h = 0,$$

où  $h \in \mathbb{N}$  et  $(a_0, \dots, a_{h-1}) \in A^h$  ( voir [3]). Ce qui montre que le polynôme

$$x^h - a_1x^{h-1} - \dots - a_h$$

est un polynôme caractéristique de la suite  $u$ .

Nous adoptons la terminologie du livre [7], à ceci près que nous parlons de *suites* là où ces auteurs parlent de *séries*. Ceci nous autorise à distinguer la suite

$u = (u(n))_{n \geq 0}$  de sa *série génératrice*  $f_u(x) = \sum_{n \geq 0} u(n)x^n$  qui est une série entière formelle.

Suivant [7], nous appelons suite *reconnaisable* une suite  $u$  telle que le sous- $A[x]$ -module de  $S(A)$  engendré par  $u$ , est de type fini sur  $A$ . Ces suites sont dites rationnelles car la suite  $u$  est reconnaissable si et seulement si sa série génératrice  $f_u$  est une fraction rationnelle dont le dénominateur est un polynôme à coefficients dans  $A$  ayant un coefficient constant inversible dans  $A$ . Il est alors facile de vérifier que la suite  $u$  est reconnaissable si et seulement si elle satisfait à une relation de récurrence à coefficient dominant unité, autrement dit  $p_h = 1$  dans la relation (2.1). C'est pourquoi nous utilisons le terme de "suite récurrente linéaire" comme un autre synonyme de "suite reconnaissable".

## 2.2 Quelques propriétés des suites récurrentes linéaires

### 2.2.1 Algèbre de Hadamard rationnelle

Rappelons la propriété de clôture suivante :

**Proposition 2.2.1.1** [20]

*Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire. L'ensemble  $r(A)$  des suites récurrentes linéaires à valeurs dans  $A$  et à coefficients dans  $A$  est une sous- $A$ -algèbre de l'algèbre de Hadamard  $S(A)$ .*

Autrement dit, l'ensemble des suites récurrentes linéaires sur un anneau commutatif unitaire est stable pour les opérations usuelles, addition multiplication par les scalaires. Pour la stabilité du produit de Hadamard, l'auteur la déduit d'un théorème sur les systèmes récursifs.

**Définition 2.2.1.1**

*Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire. La sous- $A$ -algèbre  $r(A)$  de  $S(A)$  est appelée l'algèbre de Hadamard rationnelle.*

Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire intègre. On note  $A^{alg}$  une clôture intégrale de  $A$  dans une clôture algébrique de son corps des fractions. La proposition qui suit, dont nous donnerons une réciproque plus loin dans le cas d'un corps commutatif de caractéristique nulle, nous sera utile dans les sections suivantes.

**Proposition 2.2.1.2** [20]

Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire intègre. S'il existe un entier naturel  $h$  non nul, des polynômes  $p_i$  dans  $A^{alg}[x]$ , des éléments  $\alpha_i$  dans  $A^{alg}$  ( $1 \leq i \leq h$ ) et un entier naturel  $n_0$  tels que, pour tout  $n \geq n_0$ , on ait :

$$u(n) = \sum_{i=1}^h p_i(n)\alpha_i^n$$

alors la suite  $u$  est dans  $r(A)$ .

**Démonstration**

Comme  $r(A)$  est un  $A$ -module, pour montrer que  $u$  est un élément de  $r(A)$  il suffit de montrer que la suite  $v$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v(n) = n^k \alpha^n,$$

est élément de  $r(A)$ , pour tout entier naturel  $k$  et tout élément  $\alpha$  de  $A$ ; comme de plus  $r(A)$  est une algèbre, il suffit pour cela de montrer que les deux suites  $P_k$  et  $e_\alpha$  définies respectivement, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par :

$$P_k(n) = n^k \quad \text{et} \quad e_\alpha(n) = \alpha^n$$

sont des éléments de  $r(A)$ . Or, d'une part, la suite  $P_k$  est une suite récurrente linéaire de polynôme caractéristique :

$$(x - 1)^{k+1},$$

et d'autre part, la suite  $e_\alpha$  est une suite récurrente linéaire de polynôme caractéristique  $x - \alpha$ . □

Lorsque  $A = K$  est un corps commutatif et  $L$  une extension de  $K$ , le lemme suivant montre que les suites récurrentes linéaires sur  $L$  à valeurs dans  $K$  sont exactement les suites récurrentes linéaires sur  $K$ . Plus précisément, nous avons la proposition qui suit.

**Proposition 2.2.1.3**

Soit  $K$  un corps commutatif et  $L$  une extension de  $K$ . Alors on a :

$$r(K) = r(L) \cap S(K).$$

**Démonstration**

Il est clair que toute suite récurrente linéaire à coefficients dans  $K$  est une suite récurrente linéaire à coefficients dans  $L$ , donc on a l'inclusion :

$$r(K) \subseteq r(L) \cap S(K).$$

Montrons maintenant que  $r(L) \cap S(K)$  est un sous-ensemble de  $r(K)$ . Le produit par les éléments de  $K$  confère naturellement à l'algèbre  $L$  une structure de  $K$ -espace vectoriel. Comme  $K$  est un corps commutatif, le sous-espace  $K$  est facteur direct dans  $L$ , de sorte qu'il existe une

application  $K$ -linéaire  $\psi$  de  $L$  dans  $K$  telle que  $\psi(1) = 1$ .

Ceci étant, soit  $u \in r(L) \cap S(K)$ . La suite  $u$  vérifie alors la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n+h) + p_{h-1}u(n+h-1) + \cdots + p_0u(n) = 0.$$

où  $h \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{0, \dots, h-1\}, p_i \in L, \forall n \geq 0, u(n) \in K$ .

Par la  $K$ -linéarité de  $\psi$ , on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n+h) + \sum_{i=0}^{h-1} \psi(p_i)u(n+i) = 0.$$

Puisque  $\psi(p_i) \in K$  pour tout indice  $i \in \{0, \dots, h-1\}$ , on en conclut que  $u \in r(K)$ . □

Signalons un analogue de la proposition 2.2.1.3 en remplaçant  $K$  par l'anneau des entiers relatifs  $\mathbb{Z}$  et  $L$  par le corps des nombres rationnels  $\mathbb{Q}$ . Ceci a été démontré par Fatou dans [12]. Ce résultat a été le point de départ de la théorie des anneaux de Fatou développée par Benzaghrou dans [4] et Chabert dans [9].

### Lemme 2.2.1.1

*Les suites récurrentes linéaires sur  $\mathbb{Q}$  et à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  sont les suites récurrentes linéaires sur  $\mathbb{Z}$ , autrement dit :*

$$r(\mathbb{Z}) = r(\mathbb{Q}) \cap S(\mathbb{Z})$$

Pappelons encore la définition suivante :

### Définition 2.2.1.2

*Soit  $K$  un corps commutatif et  $P$  un polynôme à coefficients dans  $K$  tel que :*

$$P(x) = x^h + p_{h-1}x^{h-1} + \cdots + p_1x + p_0, p_0 \neq 0.$$

*Le polynôme réciproque de  $P$  est le polynôme :*

$$P^*(x) = p_0x^h + p_1x^{h-1} + \cdots + p_{h-1}x + 1.$$

Quand  $K$  est un corps commutatif de caractéristique nulle, on sait que la réciproque de la proposition 2.2.1.2 est valide. Plus précisément, les suites récurrentes linéaires sur  $K$  sont caractérisées par le théorème suivant :

### Théorème 2.2.1.1

*Soit  $K$  un corps commutatif de caractéristique nulle,  $K^{alg}$  une clôture algébrique de  $K$  et  $u$  un élément de  $S(K)$ . Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. la suite  $u$  appartient à  $r(K)$
2. la série génératrice  $f_u(x) = \sum_{n \geq 0} u(n)x^n$  de la suite  $u$  est rationnelle

3. il existe un entier naturel  $h$  non nul, des polynômes  $p_i$  dans  $K^{alg}[x]$ , des éléments  $\alpha_i$

dans  $K^{alg}$  ( $1 \leq i \leq h$ ) et un entier naturel  $n_0$  tels que, pour tout  $n \geq n_0$ , on a :

$$u(n) = \sum_{i=1}^h p_i(n) \alpha_i^n.$$

On trouve la démonstration de ce théorème dans beaucoup d'ouvrages ; on peut, par exemple, consulter [7] ou [21].

### Remarque 2.2.1.1

Si la série génératrice de la suite  $u$ , élément de  $r(K)$ , s'écrit  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , avec  $(P, Q) = 1$  et  $Q(0) \neq 0$ , alors les  $\alpha_i$  sont les racines du polynôme  $Q^*$  réciproque de  $Q$ , et chaque polynôme  $p_i$  est de degré au plus  $m_i - 1$ , où  $m_i$  est l'ordre de multiplicité de la racine  $\alpha_i$  du polynôme  $Q^*$ , et on peut prendre

$$n_0 = \max(d^\circ P - d^\circ Q + 1, 0).$$

## 2.2.2 Terme général d'une suite récurrente linéaire

Soit  $K$  un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique nulle et  $\alpha \in K^*$ . On pose :

$$\begin{aligned} r_\alpha(K) &= \{u \in r(K), \exists p \in K[x], \forall n \geq 0, u(n) = p(n)\alpha^n\}, \\ Z(K) &= \{u \in r(K), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u(n) = 0\}. \end{aligned}$$

Si, pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$(u_{p,\alpha})(n) = p(n)\alpha^n, \quad \text{avec } p \in K[x], \quad \alpha \in K^*,$$

on a alors :

$$\begin{aligned} u_{p,\alpha} + u_{q,\alpha} &= u_{p+q,\alpha}, \\ u_{p,\alpha} \odot u_{q,\beta} &= u_{pq,\alpha\beta}. \end{aligned}$$

### Lemme 2.2.2.1

Soit  $K$  un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique nulle,  $\alpha \in K^*$ ,  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $T$  l'application shift et  $u$  une suite de  $r(K)$  définie par :

$$\forall n \geq n_0, \quad u(n) = p(n)\beta^n,$$

où  $\beta \in K^*$  et  $p \in K[x]$ .

Alors il existe un polynôme  $\varrho$  à coefficients dans  $K$  avec  $d^\circ \varrho = d^\circ p$  tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad ((T - \alpha I)u)(n) = \begin{cases} \alpha(p(n+1) - p(n))\alpha^n & \text{si } \alpha = \beta, \\ \varrho(n)\beta^n & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

**Démonstration**

Pour tout entier naturel  $n \geq n_0$ , on a :

pour  $\alpha = \beta$ ,

$$\begin{aligned} ((T - \alpha I)u)(n) &= u(n+1) - \alpha u(n) \\ &= p(n+1)\beta^{n+1} - \alpha p(n)\beta^n \\ &= p(n+1)\alpha^{n+1} - \alpha p(n)\alpha^n \\ &= \alpha(p(n+1) - p(n))\alpha^n, \end{aligned}$$

et pour  $\alpha \neq \beta$ ,

$$\begin{aligned} ((T - \alpha I)u)(n) &= p(n+1)\beta^{n+1} - \alpha p(n)\beta^n \\ &= (p(n+1)\beta - \alpha p(n))\beta^n \\ &= \varrho(n)\beta^n, \end{aligned}$$

où on a posé  $\varrho(n) = p(n+1)\beta - \alpha p(n)$  tel que  $d^\circ \varrho = d^\circ p$ .

□

**Lemme 2.2.2.2**

Soit  $K$  un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique nulle et  $\alpha \in K^*$ .

On a alors :

$$r_\alpha(K) = \bigcup_{m \geq 1} \text{Ker}(T - \alpha I)^m.$$

**Démonstration**

Soit une suite  $u$  dans  $r_\alpha(K)$ . Il existe alors un polynôme  $p$  à coefficients dans  $K$  tels que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u(n) = p(n)\alpha^n$ . On a, par définition de l'application  $T$  :

$$(Tu)(n) = u(n+1) = \alpha p(n+1)\alpha^n,$$

d'où :

$$((T - \alpha I)u)(n) = \alpha(p(n+1) - p(n))\alpha^n = \alpha(\Delta p)(n)\alpha^n,$$

où on a posé  $(\Delta p)(n) = p(n+1) - p(n)$ .

Par suite, on a :

$$((T - \alpha I)^2 u)(n) = (T - \alpha I)(\alpha v)(n),$$

où  $v(n) = (\Delta p)(n)\alpha^n$ .

D'où :

$$\begin{aligned} ((T - \alpha I)^2 u)(n) &= \alpha \alpha (\Delta(\Delta p))(n) \alpha^n \\ &= \alpha^2 (\Delta^2 p)(n) \alpha^n. \end{aligned}$$

Si  $k > d^\circ p$ , on obtient alors :

$$(T - \alpha I)^k u = 0,$$

i.e.,

$$u \in \bigcup_{m \geq 1} \text{Ker}(T - \alpha I)^m,$$

d'où la première inclusion.

Montrons maintenant la deuxième inclusion.

Soit  $u \in \bigcup_{m \geq 1} \text{Ker}(T - \alpha I)^m$ .

Il existe alors un entier naturel non nul  $m_0$  tel que  $u \in \text{Ker}(T - \alpha I)^{m_0}$ , d'où, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$((T - \alpha I)^{m_0} u)(n) = 0,$$

i.e.,

$$(x - \alpha)^{m_0} u = 0,$$

de sorte que  $(x - \alpha)^{m_0}$  est un polynôme caractéristique de la suite  $u$ . Mieux, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(n) = p(n)\alpha^n.$$

où  $p$  est un polynôme à coefficients dans  $K$  de degré égal  $m_0 - 1$ .

Donc la suite  $u$  est dans  $r_\alpha(K)$ . □

### Proposition 2.2.2.1

Soit  $K$  un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique nulle. Avec les notations introduites ci-dessus, on a alors :

$$r(K) = \bigoplus_{\alpha \in K^*} r_\alpha(K) \oplus Z(K).$$

### Démonstration

Remarquons qu'un élément  $u$  de l'ensemble  $\bigoplus_{\alpha \in K^*} r_\alpha(K)$  s'écrit  $u(n) = \sum_{i=1}^s p_i(n)\alpha_i^n$ ,

où  $s \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_i \in K[x]$  et  $\alpha_i \in K^*$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ .

Pour montrer la proposition, il suffit de montrer l'implication suivante :

$$(\forall n \geq n_0, \quad \sum_{i=1}^s p_i(n)\alpha_i^n = 0) \Rightarrow (\forall i \in \{1, \dots, s\}, p_i = 0).$$

Soit donc  $\sum_{i=1}^s p_i(n)\alpha_i^n = 0$ , pour  $n \geq n_0$  et posons :

$$m_i = d^\circ p_i + 1, \quad 1 \leq i \leq s, \quad \text{et} \quad q(x) = \prod_{i=1}^s (x - \alpha_i)^{m_i}.$$

On a alors :

$$q(T) = \prod_{i=1}^s (T - \alpha_i I)^{m_i},$$



d'où, pour tout entier naturel  $n \geq n_0$ , on a :

$$(q(T)u)(n) = \sum_{i=2}^s q(T)(p_i(n)\alpha_i^n) = 0. \quad (2.3)$$

D'après le lemme 2.2.2.1, il existe un polynôme  $\varrho$  dans  $K[x]$  tel que :

$$((T - \alpha_s I)v)(n) = \varrho(n)\alpha_1^n, \quad d^\circ \varrho = d^\circ p, \quad \alpha_1 \neq \alpha_s,$$

où  $v(n) = p_1(n)\alpha_1^n$ .

Plus généralement, on a :

$$((T - \alpha_s I)^{m_s}v)(n) = \varrho_s(n)\alpha_1^n, \quad d^\circ \varrho_s = d^\circ p_1,$$

et

$$((T - \alpha_{s-1} I)^{m_{s-1}}(T - \alpha_s I)^{m_s}v)(n) = \varrho_{s-1}(n)\alpha_1^n, \quad d^\circ \varrho_{s-1} = d^\circ p_1.$$

Ainsi, on arrive à :

$$(T - \alpha_2 I)^{m_2}(T - \alpha_3 I)^{m_3} \dots (T - \alpha_s I)^{m_s}v(n) = \varrho_2(n)\alpha_1^n, \quad d^\circ \varrho_2 = d^\circ p_1. \quad (2.4)$$

Des relations (2.3) et (2.4), on déduit, pour tout entier naturel  $n \geq n_0$ , que :

$$q(T)(p_1(n)\alpha_1^n) = \varrho_2(n)\alpha_1^n = 0,$$

d'où :

$$d^\circ \varrho_2 = -\infty = d^\circ p_1,$$

par suite, on a  $p_1 = 0$ ; le même raisonnement donne que tous les autres  $p_i$  sont nuls.

On en déduit, d'abord que pour  $n_0 = 0$ , les  $r_\alpha(K)$  sont en somme directe ensuite,

$$\bigoplus_{\alpha \in K^*} r_\alpha(K) \cap Z(K) = \{0\}.$$

En outre, par le théorème 2.2.1.1, on déduit que  $\bigoplus_{\alpha \in K^*} r_\alpha(K)$  et  $\bigoplus Z(K)$  sont en somme directe.  $\square$

### Remarque 2.2.2.1

Soit, comme dans le chapitre 1, la suite  $(\delta_i)_{i \geq 0}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \delta_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si  $u$  est un élément de  $r(K)$  alors il existe  $s \in \mathbb{N}^*$ , une partie finie  $F$  de  $\mathbb{N}$ ,  $a_i \in K$ , ( $i \in F$ ),

$\alpha_i \in K^*$ ,  $i \in \{1, \dots, s\}$  et des polynômes  $p_i$ ,  $i \in \{1, \dots, s\}$ , à coefficients dans  $K$  tels que :

$$u(n) = \sum_{i \in F} a_i \delta_i + \sum_{i=1}^s p_i(n)\alpha_i^n.$$

## 2.3 Quelques endomorphismes continus

### 2.3.1 Résultat préliminaire

Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire intègre et  $End^c(r(A))$  le monoïde des  $A$ -endomorphismes continus de l'algèbre de Hadamard rationnelle  $r(A)$  (vue comme un sous-espace topologique de  $S(A)$ ). Un exemple d'élément de  $End^c(r(A))$  est donné par la restriction à  $r(A)$  du décalage  $T$  dont la continuité découle du théorème 1.3.0.1.

Dans ce qui suit, nous allons donner d'autres éléments de ce monoïde ; ce qui revient à déterminer toutes les applications continues  $f$ ,  $A$ -linéaires de  $r(A)$  dans  $r(A)$ , qui vérifient pour tout  $(u, v) \in (r(A))^2$  :

1.  $f(u + v) = f(u) + f(v)$
2.  $f(u \odot v) = f(u) \odot f(v)$
3.  $f((1)) = (1)$ ,

où  $(1)$  est la suite unité de  $r(A)$ , pour le produit de Hadamard.

Le but de cette thèse est de déterminer tous les éléments de  $End^c(r(A))$ .

Soit  $id_1 \in S(A)$  la suite identité définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $id_1(n) = n$ . Elle vérifie la récurrence linéaire suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad id_1(n+2) - 2id_1(n+1) + id_1(n) = 0.$$

Elle est donc un élément de  $r(A)$ . De la proposition 1.3.0.6, On déduit le corollaire suivant :

#### Proposition 2.3.1.1

*L'application  $f \mapsto f(id_1)$  est un antimorphisme injectif du monoïde  $End^c(r(A))$  dans le monoïde des applications de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ . Son image est l'ensemble des applications  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  vérifiant :*

$$\forall u \in r(A), \quad u \circ \varphi \in r(A). \quad (2.5)$$

### 2.3.2 Applications décimation et emboîtement

D'après la proposition 1.3.0.6, on voit que la description du monoïde  $End^c(r(A))$  se réduit à celle des applications  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  satisfaisant à la propriété (2.5). On va donner d'autres éléments de cet ensemble.

#### Définition 2.3.2.1

*Soit  $d$  un entier naturel non nul et  $j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ . L'application  $\phi_{d,j}$  de  $S(A)$  dans  $S(A)$  qui, à toute suite  $u$ , associe la suite  $\phi_{d,j}u$  définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\phi_{d,j}u)(n) = u(dn + j),$$

*est appelée  $d$ -décimation de rang  $j$  (ou simplement décimation de rang  $j$ ).*

*Pour  $u \in S(A)$ , les suites  $\phi_{d,j}u$  sont dites les  $d$ -décimées (ou  $d$ -extraites) de la suite  $u$ .*

**Remarques 2.3.2.1**

1. Pour  $j = 0$ , on note  $\phi_{d,0} = \phi_d$  la  $d$ -décimation de rang 0. Nous l'appellerons la  $d$ -décimation (ou simplement décimation).
2. Si on désigne, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , par  $\phi_d^i$ , le  $i$ ème itéré de  $\phi_d$ , on a alors, pour tout  $u \in S(A)$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\phi_d^i u)(n) = u(d^i n). \quad (2.6)$$

3. Il est facile de voir que, pour tout  $j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ , on a :

$$\phi_d \circ T^j = \phi_{d,j}.$$

**Définition 2.3.2.2**

Soit  $d$  un entier naturel non nul. L'application  $E_d$  de  $(S(A))^d$  dans  $S(A)$  qui, à tout  $d$ -uplet  $(u_0, \dots, u_{d-1})$ , associe la suite  $u$  définie par :

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, d-1\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad E_d(u_0, \dots, u_{d-1})(dn + j) = u_j(n), \quad (2.7)$$

est appelée  $d$ -emboîtement (ou simplement emboîtement).

Lorsque la relation (2.7) est vérifiée, on dit que la suite  $u$  est un emboîtement des suites  $u_0, \dots, u_{d-1}$ .

**Lemme 2.3.2.1**

Les applications  $A$ -linéaires  $\phi_d$ ,  $T$  et  $E_d$  vérifient les propriétés suivantes.

1. Pour tout entier naturel  $d$  différent de 0, on a :  $T \circ \phi_d = \phi_d \circ T^d$ , de sorte que  $T$  et  $\phi_d$  ne commutent pas pour  $d \geq 2$ .
2. Plus généralement, soit  $d$  un entier naturel différent de 0 ; si on désigne, pour  $k \in \mathbb{N}$ , par  $T^k$  et  $\phi_d^k$  les  $k$ -ièmes itérés de  $T$  et  $\phi_d$  respectivement alors on a :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad T^i \circ \phi_d^j = \phi_{d^i} \circ T^{id^j}.$$

3. Si  $(u_0, \dots, u_{d-1}) \in S(A)^d$ , alors on a :

$$(T \circ E_d)(u_0, \dots, u_{d-1}) = E_d(u_1, \dots, u_{d-1}, Tu_0).$$

4. Soit  $p(x) \in A[x]$ , on a :

$$p(T^d)E_d(u_0, \dots, u_{d-1}) = E_d(p(T)u_0, \dots, p(T)u_{d-1}).$$

**Démonstration**

Il est facile de vérifier les propriétés (1) et (2) ; pour cela, il suffit d'utiliser les définitions des applications décalage  $T$ , décimation  $\phi_d$  et les relations (2.2), (2.6).

Montrons la propriété (3). D'une part, pour tout  $j \in \{0, \dots, d-2\}$  et pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\begin{aligned} ((T \circ E_d)(u_0, \dots, u_{d-1}))(dn + j) &= E_d(u_0, \dots, u_{d-1})(dn + j + 1) \\ &= u_{j+1}(n). \end{aligned}$$

Pour  $j = d - 1$ , et pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\begin{aligned}
((T \circ E_d)(u_0, \dots, u_{d-1}))(dn + d - 1) &= E_d(u_0, \dots, u_{d-1})(dn + d) \\
&= E_d(u_0, \dots, u_{d-1})(d(n + 1)) \\
&= u_0(n + 1) \\
&= (Tu_0)(n).
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout  $j \in \{0, \dots, d - 1\}$  et pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$(E_d(u_1, \dots, u_{d-1}, Tu_0))(dn + j) = (E_d(v_0, \dots, v_{d-2}, v_{d-1}))(dn + j)$$

où on a posé :

$$v_j = u_{j+1}, \quad j = 0, \dots, d - 2, \quad \text{et} \quad v_{d-1} = Tu_0.$$

Par suite, pour  $j \in \{0, \dots, d - 2\}$ , on a :

$$(E_d(u_1, \dots, u_{d-1}, Tu_0))(dn + j) = v_j(n) = u_{j+1}(n),$$

et pour  $j = d - 1$ , on a :

$$(E_d(u_1, \dots, u_{d-1}, Tu_0))(dn + j) = v_{d-1}(n) = (Tu_0)(n).$$

La preuve de la propriété (4) se ramène, grâce à la linéarité de l'opérateur  $E_d$ , au cas où  $p(T)$  est une puissance de  $T$ . Le résultat s'établit ensuite par une simple récurrence et en utilisant la propriété (3). □

La propriété (4) du lemme ci-dessus intervient dans la preuve du théorème suivant qui permettra de construire des endomorphismes de l'algèbre de Hadamard  $r(A)$ .

### **Théorème 2.3.2.1** [20]

*Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire et  $d$  un entier naturel non nul.*

1. *Si  $u$  est une suite récurrente linéaire sur  $A$  alors ses  $d$ -décimées  $\phi_{d,j}u, 0 \leq j < d$ , sont aussi des suites récurrentes linéaires sur  $A$ .*
2. *L'application  $d$ -emboîtement envoie  $(r(A))^d$  sur  $r(A)$ .*

### **Démonstration**

1 - Sur un anneau commutatif unitaire, la donnée d'une suite récurrente linéaire sur  $A$  c'est la donnée d'un entier naturel  $h$ , d'une matrice  $Q$  d'ordre  $h$  dans  $\mathbb{M}_h(A)$ , d'un vecteur colonne  $v_0$  dans  $\mathbb{M}_{h,1}(A)$ , d'un vecteur ligne  $\alpha$  dans  $\mathbb{M}_{1,h}(A)$  tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(n) = \alpha Q^n v_0.$$

Par conséquent, pour une suite récurrente linéaire  $u$ , pour tout entier naturel non nul  $d$  et pour tout  $j \in \{0, 1, \dots, d - 1\}$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\phi_{d,j}u)(n) = u(dn + j) = \alpha Q_1^n v_1,$$

où on a posé  $Q_1 = Q^d \in \mathbb{M}_h(A)$  et  $v_1 = Q^j v_0 \in \mathbb{M}_{h,1}(A)$ .  
On déduit que  $\phi_{d,j}u$  est une suite récurrente linéaire sur  $A$ .

2 - Soit  $d$  un entier naturel non nul et  $u_0, \dots, u_{d-1}$  des suites récurrentes linéaires sur  $A$ . Soit  $p(x)$  un plus petit commun multiple des polynômes caractéristiques de chacun des  $u_i$  ( $i = 0 \dots, d-1$ ). On a, d'après la propriété (4) du lemme ci-dessus :

$$p(T^d)E_d(u_0, \dots, u_{d-1}) = E_d(p(T)u_0, \dots, p(T)u_{d-1}) = 0.$$

Ce qui montre que  $p(x)$  est un polynôme caractéristique de l'emboîtement des suites  $u_0, \dots, u_{d-1}$ , c'est-à-dire, un polynôme caractéristique de la suite  $u$ . □

Dans le cas d'un corps commutatif de caractéristique nulle, on trouvera dans [2] une démonstration de (1) de ce théorème, en utilisant le terme général de la suite  $u$ .

### Proposition 2.3.2.1

*Soit  $d$  un entier naturel non nul. Les  $d$ -décimations de rang  $j$ ,  $\phi_{d,j}$ ,  $0 \leq j \leq d-1$ , sont des endomorphismes continus de l'algèbre de Hadamard rationnelle  $r(A)$ .*

### Démonstration

Soit  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $j \in \{0, \dots, d-1\}$ . On a alors :

$$\phi_{d,j} = u \circ \varphi,$$

où  $\varphi$  est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ , définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) = dn + j.$$

En appliquant le (1) du théorème 2.3.2.1 et la proposition 1.3.0.5, on conclut que  $\phi_{d,j}$  est un endomorphisme continu de l'algèbre de Hadamard  $r(A)$ . □

Dans la suite de ce document, nous utiliserons surtout le fait que, pour tout entier naturel non nul  $d$ , la décimation de rang zéro,  $\phi_{d,0} = \phi_d$ , est un endomorphisme continu de l'algèbre de Hadamard rationnelle  $r(A)$ .



# Chapitre 3

## Application tressage

Dans ce troisième chapitre, nous commençons par définir les applications  $\Delta_d$ ,  $\Sigma_\sigma$  et  $T_J$ , où  $d$  est un entier naturel non nul,  $\sigma$  est une permutation de l'ensemble  $\{0, \dots, d-1\}$  et  $J$  est un  $d$ -uplet de  $\mathbb{N}^d$ ; et à partir de ces applications et l'emboîtement  $E_d$ , nous définissons l'application  $\psi_{d,\sigma,J} = E_d \circ T_J \circ \Sigma_\sigma \circ \Delta_d$  que nous appelons *tressage*. Nous donnons un exemple pour voir pourquoi le terme tressage a été choisi pour dénommer ces applications. Après avoir montré dans la proposition 3.2.0.3 que l'image, par un *tressage*, d'une suite récurrente linéaire sur  $A$  est aussi une suite récurrente linéaire sur  $A$ , nous montrons dans la proposition 3.2.0.4 que le *tressage* est un endomorphisme continu de l'algèbre de Hadamard  $r(A)$ .

Nous définissons les tressages bijectifs, puis nous en donnons une caractérisation dans la proposition 3.3.0.5. En utilisant les propositions 3.3.0.6 et 3.3.0.7, nous montrons que l'ensemble des tressages bijectifs est un sous-groupe du groupe des automorphismes de l'algèbre de Hadamard  $r(A)$  (voir la proposition 3.3.0.8). Enfin, nous montrons dans la proposition 3.4.0.11 que la composée de deux tressages est un tressage.

### 3.1 Définitions

Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire. Afin de construire un autre endomorphisme de l'algèbre de Hadamard  $r(A)$ , nous avons besoin de la définition suivante :

#### Définition 3.1.0.3

Soit  $d$  un entier naturel non nul,  $J = (j_0, j_1, \dots, j_{d-1})$  un  $d$ -uplet de  $\mathbb{N}^d$ , et  $\sigma$  une permutation de l'ensemble  $\{0, 1, \dots, d-1\}$ .

On définit les applications suivantes :

$$a) \Delta_d : r(A) \longrightarrow (r(A))^d,$$

$$b) \Sigma_\sigma : (r(A))^d \longrightarrow (r(A))^d,$$

$$c) T_J : (r(A))^d \longrightarrow (r(A))^d,$$

par :

$$a) \forall u \in r(A), \quad \Delta_d u = (\phi_d u, (\phi_d \circ T)u, \dots, (\phi_d \circ T^{d-1})u).$$

$$b) \forall (u_0, \dots, u_{d-1}) \in (r(A))^d, \quad \Sigma_\sigma(u_0, \dots, u_{d-1}) = (u_{\sigma(0)}, \dots, u_{\sigma(d-1)}).$$

$$c) \forall (u_0, \dots, u_{d-1}) \in (r(A))^d, \quad T_J(u_0, \dots, u_{d-1}) = (T^{j_0}u_0, T^{j_1}u_1, \dots, T^{j_{d-1}}u_{d-1}).$$

#### Remarques 3.1.0.2

1. Les applications données ci-dessus sont bien définies en vertu du théorème 2.3.2.1.
2. Pour tout entier naturel non nul  $d$ , l'application  $\Delta_d$  est une bijection dont la réciproque est l'emboîtement  $E_d$ .
3. Si  $\sigma$  et  $T_J$  sont les identités alors  $\psi_{d,J,\sigma}$  est l'identité, du fait que  $\Delta_d^{-1} = E_d$ .
4. Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\bullet (\Delta_d u)(n) = (u(dn), u(dn+1), \dots, u(dn+d-1)),$$

et si on pose, pour tout  $j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ ,  $u_j(n) = u(dn+j)$ , on a alors :

$$\bullet (T_J(u_0, u_1, \dots, u_{d-1}))(n) = (u(dn+dj_0), u(dn+dj_1+1), u(dn+dj_2+2), \dots, u(dn+dj_{d-1}+d-1)).$$

$$\bullet (\Sigma_\sigma(u_0, u_1, \dots, u_{d-1}))(n) = (u(dn+\sigma(0)), u(dn+\sigma(1)), \dots, u(dn+\sigma(d-1))),$$

$$\bullet (E_d(u_0, \dots, u_{d-1}))(dn+j) = u_j(n).$$

#### Définition 3.1.0.4

L'application  $E_d \circ \Sigma_\sigma \circ T_J \circ \Delta_d$ , notée  $\psi_{d,J,\sigma}$ , est appelée application tressage.



Notons que l'application  $\psi_{d,\sigma,J} = E_d \circ T_J \circ \Sigma_\sigma \circ \Delta_d$  est aussi appelée application *tressage*. Toutefois, nous avons la proposition suivante.

**Proposition 3.1.0.2**

Soit  $d$  un entier naturel non nul,  $J$  un  $d$ -uplet d'entiers naturels et  $\sigma$  une permutation de l'ensemble  $\{0, \dots, d-1\}$ . Alors il existe un  $d$ -uplet  $J'$  d'entiers naturels tel que l'on ait :

$$\psi_{d,J,\sigma} = \psi_{d,\sigma,J'}$$

**Démonstration**

Posons  $J = (j_0, \dots, j_{d-1})$ . Il suffit alors de prendre, pour tout  $k \in \{0, \dots, d-1\}$ ,

$$j'_k = j_{\sigma(k)} \quad \text{et} \quad J' = (j'_0, \dots, j'_{d-1}).$$

□

**Remarques 3.1.0.3**

1. De cette proposition, on déduit que  $E_d \circ T_J \circ \Sigma_\sigma \circ \Delta_d = E_d \circ \Sigma_\sigma \circ T_{\sigma(J)} \circ \Delta_d$
2. Si  $\psi_{d,\sigma,J} = \psi_{d,J',\sigma}$  alors, pour tout  $k \in \{0, \dots, d-1\}$ , on a :  $j'_k = j_{\sigma^{-1}(k)}$ .

## 3.2 Exemples de tressages

Nous verrons dans le premier exemple pourquoi le terme *tressage* a été choisi pour illustrer ces applications. Soit  $u$  une suite de  $S(A)$ .

**Exemple 1**

Pour  $d = 3$ ,  $J = (1, 3, 2)$  et  $\sigma = (0, 1)$  une permutation de l'ensemble  $\{0, 1, 2\}$ , on a, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$(\Delta_3 u)(n) = (u(3n), u(3n+1), u(3n+2)).$$

Soit  $u_0, u_1, u_2$  les suites définies, pour tout entier naturel  $n$  non nul, par :

$$u_0(n) = u(3n), \quad u_1(n) = u(3n+1), \quad u_2(n) = u(3n+2).$$

$$\text{Comme } T_J(u_0, u_1, u_2) = (Tu_0, T^3u_1, T^2u_2),$$

on a alors, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$((\Delta_3 \circ T_J)(u_0, u_1, u_2))(n) = (u(3n+3), u(3n+10), u(3n+8)).$$

Par suite :

$$((\Sigma_\sigma \circ \Delta_3 \circ T_J)(u_0, u_1, u_2))(n) = (u(3n+10), u(3n+3), u(3n+8)).$$

Soit  $v_0, v_1, v_2$  les suites définies, pour tout entier naturel  $n$  non nul, par :

$v_0(n) = u(3n + 10)$ ,  $v_1(n) = u(3n + 3)$ ,  $v_2(n) = u(3n + 8)$ . On obtient le tressage :

$\psi_{3,J,\sigma}(u) = (u(10), u(3), u(8), u(13), u(6), u(11), u(16), u(9), u(14), u(19), u(12), u(17), \dots)$ .

D'où le tressage :

Le graphe est disposé en  $d$  colonnes constituées par les  $u(dn), u(dn + 1), \dots, u(dn + d - 1)$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ . Les flèches relient les valeurs de la suite  $\psi_{(d,J,\sigma)}u$  qui sont en précédence. On voit que ces flèches se tressent en formant un "tressage" ; d'où l'appellation donnée à ces applications.

### Exemple 2

Si  $d = 3$ ,  $J = (1, 2, 3)$  et  $\sigma = (0, 2)$  une permutation de l'ensemble  $\{0, 1, 2\}$ , on a :

$(\psi_{d,J,\sigma})(u) = (u(11), u(7), u(3), u(14), u(10), u(6), u(17), u(13), u(9), u(20), \dots)$

$(\psi_{d,\sigma,J})(u) = (u(5), u(7), u(9), u(8), u(10), u(12), u(11), u(13), u(15), u(14), \dots)$ ,

de sorte que  $\psi_{d,J,\sigma}$  et  $\psi_{d,\sigma,J}$  ne sont pas égaux.

### Exemple 3 :

Si  $d = 4$ ,  $J = (1, 3, 4, 2)$  et  $\sigma = (1, 2, 3)$  une permutation de l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3\}$  alors on trouve

$$J' = (1, 4, 2, 3),$$

de sorte que

$$\psi_{d,J,\sigma} = \psi_{d,\sigma,J'}.$$

### Exemple 4

Si  $d = 5$ ,  $J = (1, 0, 5, 2, 3)$  et  $\sigma = (0, 3)(2, 4)$  une permutation de l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  alors on trouve

$$J' = (2, 0, 3, 1, 5),$$

de sorte que

$$\psi_{d,\sigma,J} = \psi_{d,J',\sigma}.$$

### Proposition 3.2.0.3

*L'image, par un tressage, d'une suite récurrente linéaire est une suite récurrente linéaire.*

**Démonstration**

Soit  $u$  une suite récurrente linéaire. Soit  $d$  un entier naturel non nul,  $J$  un  $d$ -uplet d'entiers naturels et  $\sigma$  une permutation de l'ensemble  $\{0, \dots, d-1\}$ . D'après le (1) du théorème 2.3.2.1, les suites  $u_0, \dots, u_{d-1}$  dont  $u$  est l'emboîtement sont dans  $r(K)$ , *i.e.*, des suites récurrentes linéaires. Par définition des applications  $\Sigma_\sigma$  et  $T_J$ , la suite  $(\Sigma_\sigma \circ T_J \circ \Delta_d)u$  est dans  $(r(K))^d$ . Par suite, en utilisant le (2) du théorème 2.3.2.1, on déduit que la suite  $(E_d \circ \Sigma_\sigma \circ T_J \circ \Delta_d)u$  est dans  $r(K)$ , c'est-à-dire que la suite  $\psi_{d,J,\sigma}$  est une suite récurrente linéaire.  $\square$

Soit  $x$  un nombre réel. Rappelons les notations  $[x]$  pour la partie entière de  $x$  et  $\{x\} = x - [x]$  pour sa partie fractionnaire. On observe que le tressage  $\psi_{d,J,\sigma}$  est donné par :

$$\forall u \in r(A), \quad \psi_{d,J,\sigma}(u) = u \circ \varphi,$$

où  $\varphi$  est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  définie par :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) &= d\left(\left[\frac{n}{d}\right] + j_{\sigma(n-d[\frac{n}{d}])}\right) + \sigma(n - d[\frac{n}{d}]). \\ &= d\left(\left[\frac{n}{d}\right] + j_{\sigma(d\{\frac{n}{d}\})}\right) + \sigma(d\{\frac{n}{d}\}). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Les propositions 1.3.0.5 et 1.3.0.6 montrent donc l'énoncé suivant :

**Proposition 3.2.0.4**

*Pour tout entier naturel non nul  $d$ , pour tout  $d$ -uplet  $J$  d'entiers naturels et pour toute permutation  $\sigma$  de l'ensemble  $\{0, \dots, d-1\}$ , l'application tressage  $\psi_{d,J,\sigma}$  est un endomorphisme continu de l'algèbre rationnelle  $r(A)$ .*

### 3.3 Caractérisation des tressages bijectifs

On a la caractérisation suivante des tressages bijectifs.

**Proposition 3.3.0.5**

*Soit  $d$  un entier naturel non nul,  $J$  un  $d$ -uplet d'entiers naturels et  $\sigma$  une permutation de l'ensemble  $\{0, \dots, d-1\}$ . Le tressage  $\psi_{d,J,\sigma}$  est un automorphisme de  $r(A)$  si et seulement si  $J = (0, \dots, 0)$ .*

**Démonstration**

Supposons que  $J = (0, \dots, 0)$ , alors  $T_J$  est l'identité, de sorte que  $\psi_{d,J,\sigma}$  est une bijection comme composée de bijections.

Réciproquement, supposons que  $J = (j_0, \dots, j_{d-1}) \neq (0, \dots, 0)$ , alors il existe un indice  $r$  dans

$\{0, \dots, d-1\}$  tel que  $j_r \neq 0$ . Pour la suite  $\delta_r$  de  $r(A)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \delta_r(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = r, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on a :

$$\Delta_d(\delta_r) = (0, \dots, 0, \delta_0, 0, \dots, 0),$$

où  $\delta_0$  est au  $(r + 1)$ -ième rang. On en déduit que :

$$(T_J \circ \Delta_d)(\delta_r) = (0, \dots, 0)$$

Ensuite, en appliquant  $\Sigma_\sigma$  puis  $E_d$ , on obtient :

$$\psi_{d,J,\sigma}(\delta_r) = 0,$$

de sorte que le tressage  $\psi_{d,J,\sigma}$  n'est pas injectif, donc n'est pas bijectif. □

### Remarques 3.3.0.4

1. On convient d'écrire  $\psi_{d,\sigma}$  au lieu de  $\psi_{d,J,\sigma}$  quand  $J = (0, \dots, 0)$ .
2. De la proposition précédente, on déduit que les tressages bijectifs sont les applications  $\psi_{d,\sigma}$ , où  $d$  est un entier naturel non nul et  $\sigma$  une permutation de l'ensemble  $\{0, \dots, d-1\}$ .
3. On observe que le tressage  $\psi_{d,\sigma}$  s'écrit  $\psi_{d,\sigma}(u) = u \circ \varphi$ , où  $\varphi$  est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) = d \left\lceil \frac{n}{d} \right\rceil + \sigma(d \left\{ \frac{n}{d} \right\}). \quad (3.2)$$

### Remarque 3.3.0.1

Pour un tressage bijectif, la suite  $(\varphi(n))_{n \geq 0}$  de (3.2) n'est pas en général croissante, et ceci invalide l'énoncé du théorème 1.4 du livre "Recurrence Sequences (2003), p. 5, de ([11]), comme on le voit dans l'exemple suivant :

$u$  une suite récurrente linéaire dans  $r(A)$ . Considérons l'application (ou la suite)  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ , donnée par :

$$\begin{aligned} \varphi &= (\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \dots) \\ &= (1, 2, 0, 4, 5, 3, 7, 8, 6, \dots). \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} u \circ \varphi &= ((u \circ \varphi(0)), (u \circ \varphi(1)), (u \circ \varphi(2)), \dots) \\ &= (u(1), u(2), u(0), u(4), u(5), u(3), u(7), u(8), u(6), \dots). \end{aligned}$$

Il est facile de voir qu'en fait, la suite  $u \circ \varphi$  est le tressage bijectif  $\psi_{3,\sigma}u$ , avec  $d = 3$  et  $\sigma = (0, 1, 2)$ . En vertu de la proposition 3.2.0.3, on déduit que la suite  $u \circ \varphi$  est dans  $r(K)$ . Et on voit bien que la suite  $(\varphi(n))_{n \geq 0}$ , qui est donnée par (3.2), n'est pas croissante.

Nous verrons dans la section suivante qu'il existe d'autres automorphismes de l'algèbre  $r(A)$  que les tressages bijectifs.

**Proposition 3.3.0.6**

Soit  $d$  un entier naturel non nul et  $\delta, \delta'$  deux permutations de l'ensemble  $\{0, \dots, d-1\}$ . On a alors :

$$\psi_{d,\sigma} \circ \psi_{d,\sigma'} = \psi_{d,\sigma \circ \sigma'},$$

i.e.,

$$(E_d \circ \Sigma_\sigma \circ \Delta_d) \circ (E_d \circ \Sigma_{\sigma'} \circ \Delta_d) = E_d \circ \Sigma_{\sigma \circ \sigma'} \circ \Delta_d$$

**Démonstration**

Du fait que  $E_d = \Delta_d^{-1}$ , on a :

$$(E_d \circ \Sigma_\sigma \circ \Delta_d) \circ (E_d \circ \Sigma_{\sigma'} \circ \Delta_d) = E_d \circ \Sigma_\sigma \circ \Sigma_{\sigma'} \circ \Delta_d.$$

Or, si  $u_0, u_1, \dots, u_{d-1}$  sont des suites alors on a :

$$\begin{aligned} (\Sigma_\sigma \circ \Sigma_{\sigma'})(u_0, u_1, \dots, u_{d-1}) &= \Sigma_\sigma(u_{\sigma'(0)}, u_{\sigma'(1)}, \dots, u_{\sigma'(d-1)}) \\ &= (u_{\sigma(\sigma'(0))}, u_{\sigma(\sigma'(1))}, \dots, u_{\sigma(\sigma'(d-1))}) \\ &= (u_{(\sigma \circ \sigma')(0)}, u_{(\sigma \circ \sigma')(1)}, \dots, u_{(\sigma \circ \sigma')(d-1)}) \\ &= \Sigma_{\sigma \circ \sigma'}(u_0, u_1, \dots, u_{d-1}). \end{aligned}$$

On déduit alors que les tressages bijectifs  $\psi_{d,\sigma} \circ \psi_{d,\sigma'}$  et  $\psi_{d,\sigma \circ \sigma'}$  coïncident. □

**Proposition 3.3.0.7**

Soit  $d, d'$  deux entiers naturels non nuls et  $\sigma$  une permutation de l'ensemble  $\{0, \dots, d-1\}$ . Alors il existe une permutation  $\tau$  de l'ensemble  $\{0, \dots, dd'-1\}$  telle que

$$\psi_{d,\sigma} = \psi_{dd',\tau}$$

i.e.,

$$E_d \circ \Sigma_\sigma \circ \Delta_d = E_{dd'} \circ \Sigma_\tau \circ \Delta_{dd'}.$$

**Démonstration**

Soit  $i \in \{0, 1, \dots, dd'-1\}$ . On pose

$$\tau(i) = d \left[ \frac{i}{d} \right] + \sigma(d \{ \frac{i}{d} \}),$$

et on vérifie que  $\tau$  est une permutation de l'ensemble  $\{0, 1, \dots, dd'-1\}$  d'inverse

$$\tau^{-1}(i) = d \left[ \frac{i}{d} \right] + \sigma^{-1}(d \{ \frac{i}{d} \}).$$

Il est alors facile de voir, par la formule (3.2), que les deux tressages  $\psi_{d,\sigma}$  et  $\psi_{dd',\tau}$  coïncident. □

**Remarque 3.3.0.2**

En d'autres termes, la permutation  $\tau$  de la proposition précédente est définie par :

$$\tau(i) = dq + \sigma(j),$$

où  $i = dq + j$ ,  $0 \leq j \leq d - 1$ .

**Exemple**

Pour les entiers naturels  $d = 3$ ,  $d' = 2$ , et la permutation  $\sigma = (1, 2)$  de l'ensembles  $\{0, 1, 2\}$ , on trouve la permutation :

$$\tau = (1, 2)(4, 5)$$

de l'ensemble  $\{0, \dots, 5\}$ , et on a bien pour toute suite  $u$  dans  $S(A)$  :

$$\psi_{3,\sigma}(u) = \psi_{6,\tau}(u) = (u(0), u(2), u(1), u(3), u(5), u(4), u(6), u(8), u(7), u(9), u(11), u(10), \dots).$$

**Proposition 3.3.0.8**

*Les tressages bijectifs forment un sous-groupe du groupe des automorphismes bicontinus de l'algèbre de Hadamard rationnelle  $r(A)$ .*

**Démonstration**

Soit  $\psi_{d,\sigma}$  un tressage bijectif, où  $d$  est un entier naturel non nul et  $\sigma$  une permutation de l'ensemble  $\{0, \dots, d - 1\}$ .

Il est alors facile de voir que l'on a :

$$(\psi_{d,\sigma})^{-1} = \psi_{d,\sigma^{-1}},$$

ce qui fait voir que tout tressage bijectif est un automorphisme bicontinu de l'algèbre  $r(A)$ .

Soit maintenant  $\psi_{d,\sigma}$  et  $\psi_{d',\sigma'}$  deux tressages quelconques bijectifs, où  $d, d'$  sont deux entiers naturels non nuls et  $\sigma, \sigma'$  sont deux permutations des ensembles  $\{0, \dots, d - 1\}$  et  $\{0, \dots, d' - 1\}$  respectivement. Il existe alors, d'après la proposition 3.3.0.7, deux permutations  $\tau$  et  $\tau'$  de l'ensemble  $\{0, \dots, dd' - 1\}$  telles que :

$$\psi_{d,\sigma} = \psi_{dd',\tau} \quad \text{et} \quad \psi_{d',\sigma'} = \psi_{dd',\tau'}.$$

Et en vertu de la proposition 3.3.0.6, on obtient :

$$\begin{aligned} (\psi_{d,\sigma}) \circ (\psi_{d',\sigma'}) &= (\psi_{dd',\tau}) \circ (\psi_{dd',\tau'}) \\ &= \psi_{dd',\tau \circ \tau'} \end{aligned}$$

qui est un tressage bijectif.

□

**Remarque 3.3.0.3**

Le groupe des tressages bijectifs n'est pas commutatif, comme on le voit dans l'exemple suivant.

Pour les entiers naturels  $d = 2$ ,  $d' = 3$  et les permutations  $\sigma = (0, 1)$ ,  $\sigma' = (0, 1, 2)$  des ensembles respectifs  $\{0, 1\}$ ,  $\{0, 1, 2\}$ , on trouve, pour toute suite  $u$  dans  $S(A)$ , les tressages suivants :

$$(\psi_{d,\sigma} \circ \psi_{d',\sigma'})(u) = (u(2), u(1), u(4), u(0), u(3), u(5), u(8), u(7), u(10), u(11), u(14), \dots)$$

$$(\psi_{d',\sigma'} \circ \psi_{d,\sigma})(u) = (u(0), u(3), u(1), u(5), u(4), u(2), u(6), u(9), u(7), u(11), u(10), \dots).$$

On voit bien que :

$$\psi_{d,\sigma} \circ \psi_{d',\sigma'} \neq \psi_{d',\sigma'} \circ \psi_{d,\sigma}.$$

### 3.4 Composition de tressages

Nous savons, d'après la proposition 3.3.0.8, que la composée de deux tressages bijectifs est un tressage bijectif. Nous allons maintenant montrer que la composée de deux tressages, non nécessairement bijectifs, est aussi un tressage. Pour cela, nous montrons d'abord les deux propositions qui suivent et qui nous seront utiles par la suite.

**Proposition 3.4.0.9**

Soit  $d$  un entier naturel non nul,  $J = (j_0, \dots, j_{d-1})$ ,  $J' = (j'_0, \dots, j'_{d-1})$  deux  $d$ -uplets d'entiers naturels et  $\sigma, \sigma'$  deux permutations de l'ensemble  $\{0, \dots, d-1\}$ . Il existe alors un  $d$ -uplet  $J'' = (j''_0, \dots, j''_{d-1})$  d'entiers naturels et une permutation  $\sigma''$  de l'ensemble  $\{0, \dots, d-1\}$  tels que l'on ait :

$$\psi_{d,J,\sigma} \circ \psi_{d,J',\sigma'} = \psi_{d,J'',\sigma''}.$$

**Démonstration**

Rappelons que pour un tressage quelconque  $\psi_{d,J,\sigma}$ , on a  $(\psi_{d,J,\sigma})(u) = u \circ \varphi$ , où  $\varphi$  est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ , donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) = d\left(\left[\frac{n}{d}\right] + j_{\sigma(r)}\right) + \sigma(r), \quad r = d\left\{\frac{n}{d}\right\}.$$

Soit  $n$  un entier naturel, nous allons exprimer  $(\varphi \circ \varphi')(n)$ ; nous savons que :

$$\varphi'(n) = d\left(\left[\frac{n}{d}\right] + j'_{\sigma'(r)}\right) + \sigma'(r), \quad r = d\left\{\frac{n}{d}\right\}.$$

En appliquant  $\varphi$ , on obtient :

$$(\varphi \circ \varphi')(n) = d\left(\left[\frac{\varphi'(n)}{d}\right] + j_{\sigma(r)}\right) + \sigma(r), \quad r = d\left\{\frac{\varphi'(n)}{d}\right\}.$$

Par suite, on a :

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \varphi')(n) &= d\left[\left[\frac{n}{d}\right] + j'_{\sigma'(r)} + \frac{\sigma'(r)}{d}\right] + dj_{\sigma(\sigma'(r))} + \sigma(\sigma'(r)) \\ &= d\left(\left[\frac{n}{d}\right] + j'_{\sigma'(r)} + j_{(\sigma \circ \sigma')(r)}\right) + (\sigma \circ \sigma')(r). \end{aligned}$$

En posant  $\sigma'' = \sigma \circ \sigma'$  et  $k = (\sigma \circ \sigma')(r)$  en sachant que  $0 \leq r < d-1$ , on obtient :

$$\forall k \in \{0, \dots, d-1\}, \quad j''_k = j_k + j'_{\sigma^{-1}(k)},$$

de sorte que :

$$(\varphi \circ \varphi')(n) = d\left(\left[\frac{n}{d}\right] + j''_{\sigma''(k)}\right) + \sigma''(k), \quad k = d\left\{\frac{n}{d}\right\}.$$

□



**Proposition 3.4.0.10**

Soit  $d, d'$  deux entiers naturels non nuls,  $J = (j_0, \dots, j_{d-1})$  un  $d$ -uplet d'entiers naturels et  $\sigma$  une permutation de l'ensemble  $\{0, \dots, d-1\}$ . Alors il existe un  $dd'$ -uplet  $J' = (j'_0, \dots, j'_{dd'-1})$  d'entiers naturels et une permutation  $\tau$  de l'ensemble  $\{0, \dots, dd'-1\}$  tels que l'on ait :

$$\psi_{d,J,\sigma} = \psi_{dd',J',\tau}.$$

**Démonstration**

On considère l'égalité  $\psi_{d,J,\sigma} = \psi_{dd',J',\tau}$  et on cherche  $J'$  et  $\tau$  en fonction de  $J$  et  $\sigma$ .

$\varphi$  l'application associée au tressage  $\psi_{d,J,\sigma}$ , elle est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) = d \left( \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor + j_{\sigma(r)} \right) + \sigma(r), \quad r = d \left\{ \frac{n}{d} \right\}.$$

On a alors :

$$\frac{n}{d} = d' \frac{n}{dd'} = d' \left[ \frac{n}{dd'} \right] + d' \left\{ \frac{n}{dd'} \right\} = d' \left[ \frac{n}{dd'} \right] + \frac{r'}{d}$$

où  $r' = dd' \left\{ \frac{n}{dd'} \right\}$ .

En prenant la partie entière de  $\frac{n}{d}$ , on obtient :

$$\left[ \frac{n}{d} \right] = \left[ d' \left[ \frac{n}{dd'} \right] + \frac{r'}{d} \right] = d' \left[ \frac{n}{dd'} \right] + \left[ \frac{r'}{d} \right].$$

Par suite, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= d \left( d' \left[ \frac{n}{dd'} \right] + \left[ \frac{r'}{d} \right] + j_{\sigma(r)} \right) + \sigma(r) \\ &= dd' \left[ \frac{n}{dd'} \right] + d \left[ \frac{r'}{d} \right] + dj_{\sigma(r)} + \sigma(r). \end{aligned}$$

On veut avoir l'égalité :

$$dd' \left[ \frac{n}{dd'} \right] + d \left[ \frac{r'}{d} \right] + dj_{\sigma(r)} + \sigma(r) = dd' \left( \left[ \frac{n}{dd'} \right] + j'_{\tau(r')} \right) + \tau(r'),$$

*i.e.*,

$$d \left[ \frac{r'}{d} \right] + dj_{\sigma(r)} + \sigma(r) = dd' j'_{\tau(r')} + \tau(r').$$

De cette dernière égalité, on déduit que :

$$j'_{\tau(r')} = \left[ \frac{1}{d'} \left[ \frac{r'}{d} \right] + \frac{j_{\sigma(r)}}{d'} + \frac{\sigma(r)}{dd'} \right],$$

et il suffit de prendre la permutation  $\tau$  suivante définie par :

$$\forall r' \in \{0, \dots, dd' - 1\}, \quad \tau(r') = dd' \left\{ \frac{1}{d'} \left[ \frac{r'}{d} \right] + \frac{j_{\sigma(r)}}{d'} + \frac{\sigma(r)}{dd'} \right\},$$

où  $r = d \left\{ \frac{r'}{d} \right\}$ .

En posant  $k = \tau(r')$ , le  $dd'$ -uplet  $J'$  est donné par :

$$\forall k \in \{0, \dots, dd' - 1\}, \quad j'_k = \left[ \frac{1}{d'} \left[ \frac{\tau^{-1}(k)}{d} \right] + \frac{j_{\sigma(r)}}{d'} + \frac{\sigma(r)}{dd'} \right],$$

où  $r = d \left\{ \frac{\tau^{-1}(k)}{d} \right\}$ .

Il reste à montrer que  $\tau$  est bien une permutation de l'ensemble  $\{0, \dots, dd' - 1\}$ . Pour cela, il suffit de montrer que  $\tau$  est injective.

Soit donc deux entiers naturels  $r'$  et  $r''$  dans l'ensemble  $\{0, \dots, dd' - 1\}$  tels que  $\tau(r') = \tau(r'')$ .

On a alors :

$$\left\{ \frac{1}{d'} \left[ \frac{r'}{d} \right] + \frac{j_{\sigma(r)}}{d'} + \frac{\sigma(r)}{dd'} \right\} = \left\{ \frac{1}{d'} \left[ \frac{r''}{d} \right] + \frac{j_{\sigma(s)}}{d'} + \frac{\sigma(s)}{dd'} \right\},$$

où  $r = d \left\{ \frac{r'}{d} \right\}$  et  $s = d \left\{ \frac{r''}{d} \right\}$ .

Cette dernière égalité est équivalente à :

$$\begin{aligned} & d \left[ \frac{r'}{d} \right] + dj_{\sigma(r)} + \sigma(r) - dd' \left[ \frac{1}{d'} \left[ \frac{r'}{d} \right] + \frac{j_{\sigma(r)}}{d'} + \frac{\sigma(r)}{dd'} \right] \\ &= d \left[ \frac{r''}{d} \right] + dj_{\sigma(s)} + \sigma(s) - dd' \left[ \frac{1}{d'} \left[ \frac{r''}{d} \right] + \frac{j_{\sigma(s)}}{d'} + \frac{\sigma(s)}{dd'} \right]. \end{aligned}$$

On obtient alors *modulo*  $dd'$  :

$$d \left[ \frac{r'}{d} \right] + dj_{\sigma(r)} + \sigma(r) \equiv d \left[ \frac{r''}{d} \right] + dj_{\sigma(s)} + \sigma(s) \pmod{dd'}, \quad (3.3)$$

par suite, on déduit, *modulo*  $d$ , que :

$$\sigma(r) \equiv \sigma(s) \pmod{d}.$$

Comme  $\sigma(r)$  et  $\sigma(s)$  sont dans l'ensemble  $\{0, \dots, d - 1\}$ , on a alors, d'une part :

$$\sigma(r) = \sigma(s),$$

ce qui implique que  $r = s$ ,  
d'autre part, en remplaçant  $s$  par  $r$  dans l'égalité (3.3), on obtient :

$$d \left[ \frac{r'}{d} \right] \equiv d \left[ \frac{r''}{d} \right] \pmod{dd'},$$

par suite, comme  $r = d \left\{ \frac{r'}{d} \right\}$ , on a :

$$\begin{aligned} r' &= d \left[ \frac{r'}{d} \right] + d \left\{ \frac{r'}{d} \right\} \\ &= d \left[ \frac{r'}{d} \right] + r \\ &\equiv d \left[ \frac{r''}{d} \right] + s \pmod{dd'} \\ &\equiv r'' \pmod{dd'}, \end{aligned}$$

comme  $r'$  et  $r''$  sont dans l'ensemble  $\{0, \dots, dd' - 1\}$ , on conclut que  $r' = r''$ , ce qui montre que  $\tau$  est injective, donc c'est bien une permutation de l'ensemble  $\{0, \dots, dd' - 1\}$ . □

### Proposition 3.4.0.11

*La composée de deux tressages est un tressage.*

#### Démonstration

Soit  $d_1, d_2$  deux entiers naturels non nuls,  $J_1$  un  $d_1$ -uplet dans  $\mathbb{N}^{d_1}$ ,  $J_2$  un  $d_2$ -uplet dans  $\mathbb{N}^{d_2}$ ,

$\sigma_1$  et  $\sigma_2$  deux permutations des l'ensembles  $\{0, \dots, d_1 - 1\}$  et  $\{0, \dots, d_2 - 1\}$  respectivement.

D'après la proposition 3.4.0.10, il existe deux  $d_1 d_2$ -uplets  $J'_1, J'_2$  dans  $\mathbb{N}^{d_1 d_2}$  et deux permutations  $\tau_1, \tau_2$  de l'ensemble  $\{0, \dots, d_1 d_2 - 1\}$  tels que l'on ait :

$$\psi_{d_1, J_1, \sigma_1} = \psi_{d_1 d_2, J'_1, \tau_1}$$

$$\psi_{d_2, J_2, \sigma_2} = \psi_{d_1 d_2, J'_2, \tau_2}.$$

En vertu de la proposition 3.4.0.9, il existe un  $d_1 d_2$ -uplet  $J$  dans  $\mathbb{N}^{d_1 d_2}$  et une permutation

$\tau$  de l'ensemble  $\{0, \dots, d_1 d_2 - 1\}$  tels que l'on ait :

$$\begin{aligned} \psi_{d_1, J_1, \sigma_1} \circ \psi_{d_2, J_2, \sigma_2} &= \psi_{d_1 d_2, J'_1, \tau_1} \circ \psi_{d_1 d_2, J'_2, \tau_2} \\ &= \psi_{d_1 d_2, J, \tau}, \end{aligned}$$

de sorte que l'application  $\psi_{d_1, J_1, \sigma_1} \circ \psi_{d_2, J_2, \sigma_2}$  est un tressage. □

### Exemples

Soit  $u$  une suite de  $S(A)$ .

1. Pour  $d = 5$ ,  $d' = 2$ ,  $J = (2, 0, 3, 1, 5) \in \mathbb{N}^5$  et  $\sigma = (0, 3)(2, 4)$  une permutation de l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ , on trouve :

$$\sigma' = (0, 8, 5, 3)(2, 9)(4, 7) \text{ permutation de } \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$J' = (1, 0, 2, 1, 3, 1, 0, 1, 0, 2) \in \mathbb{N}^{10}$$

tels que :

$$\psi_{5, J, \sigma} = \psi_{10, J', \sigma'},$$

et on a bien l'égalité :

$$(\psi_{5, J, \sigma})(u) = (\psi_{10, J', \sigma'})(u) = (u(8), u(1), u(29), u(10), u(17), u(13), u(6), u(34), u(15), u(22), \dots).$$

2. Pour  $d_1 = 3$ ,  $J_1 = (3, 3, 3) \in \mathbb{N}^3$ ,  $\sigma_1 = (0, 2)$  une permutation de  $\{0, 1, 2\}$  et

pour  $d_2 = 4$ ,  $J_2 = (2, 2, 2, 2) \in \mathbb{N}^4$ ,  $\sigma_2 = (1, 2)$  une permutation de  $\{0, 1, 2, 3\}$ , on trouve :

$$\tau = (0, 7)(1, 5, 8, 11)(2, 6)(3, 9, 4, 10) \text{ permutation de } \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\},$$

$$J = (2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \in \mathbb{N}^{12},$$

tels que :

$$\psi_{3, J_1, \sigma_1} \circ \psi_{4, J_2, \sigma_2} = \psi_{12, J, \tau},$$

et on a bien l'égalité :

$$(\psi_{3, J_1, \sigma_1} \circ \psi_{4, J_2, \sigma_2})(u) = (\psi_{12, J, \tau})(u)$$

$$= (u(19), u(17), u(18), u(21), u(22), u(20), u(26), u(24), u(23), u(28), u(27), u(25), u(31), \dots).$$

#### Remarque 3.4.0.4 :

Les tressages  $\psi_{d_1, J_1, \sigma_1}$  et  $\psi_{d_2, J_2, \sigma_2}$  ne commutent pas, en général. En effet, en reprenant l'exemple précédent, on a vu que pour toute suite  $u$  :

$$(\psi_{3, J_1, \sigma_1} \circ \psi_{4, J_2, \sigma_2})(u) = (u(19), u(17), u(18), u(21), u(22), u(20), u(26), u(24), u(23), u(28), u(27), \dots).$$

D'autre part, après calculs, on trouve :

$$(\psi_{4, J_2, \sigma_2} \circ \psi_{3, J_1, \sigma_1})(u) = (u(15), u(19), u(20), u(18), u(23), u(21), u(22), u(26), u(25), u(29), u(24), \dots).$$

On a bien :

$$\psi_{3, J_1, \sigma_1} \circ \psi_{4, J_2, \sigma_2} \neq \psi_{4, J_2, \sigma_2} \circ \psi_{3, J_1, \sigma_1}.$$

# Chapitre 4

## Applications semi-affines

Dans ce quatrième chapitre, nous considérons  $A = K$  un corps commutatif de caractéristique nulle. Nous caractérisons d'abord les idempotents de l'algèbre de Hadamard rationnelle  $r(K)$ ; ainsi, en utilisant le théorème 4.1.0.2 de Lech-Skolem-Mahler, nous montrons que les idempotents de l'algèbre  $r(K)$  sont les indicatrices des parties  $N$ , réunions d'une partie finie de  $\mathbb{N}$  et de progressions arithmétiques (voir la proposition 4.1.0.12).

Ensuite, nous définissons les applications semi-affines  $\varphi_{(d,a,b,c,t)}$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  par :

$$\varphi_{(d,a,b,c,t)}(n) = \begin{cases} c_n & \text{si } n < dt, \\ a_r \left[ \frac{n}{d} \right] + b_r & \text{si } n \geq dt \end{cases}$$

où  $(d, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ ,  $a = (a_i)_{0 \leq i < d} \in \mathbb{N}^d$ ,  $b = (b_i)_{0 \leq i < d} \in \mathbb{Z}^d$ ,  $c = (c_l)_{0 \leq l < dt} \in \mathbb{N}^{dt}$ , et  $r = d \left\{ \frac{n}{d} \right\}$ .

On suppose ces données assujetties aux conditions  $a_i t + b_i \geq 0$  pour tout  $i \in \{0, \dots, d-1\}$ .

Nous notons  $\Phi$  l'ensemble de ces applications semi-affines. Nous montrons, dans la proposition 4.2.2.1, que pour que  $\varphi$  un élément de l'ensemble  $\Phi$  il faut et il suffit que  $\varphi$  vérifie une relation de récurrence linéaire de la forme :

$$\forall n \geq dt, \quad \varphi(n+2d) - 2\varphi(n+d) + \varphi(n) = 0,$$

où  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in \mathbb{N}$ .

Puis, nous montrons, dans la proposition 4.2.2.2, que l'ensemble  $\Phi$  est un sous-monoïde du monoïde formé par toutes les applications de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ . Ensuite, nous montrons que si une application  $\varphi$  est semi-affine et  $u$  est une suite récurrente linéaire alors la suite  $u \circ \varphi$  est une suite récurrente linéaire (voir la proposition 4.2.3.1) et que l'application  $u \mapsto u \circ \varphi$  est un endomorphisme continu de l'algèbre  $r(A)$  (voir le corollaire 4.2.3.1). Nous donnons quelques résultats préliminaires (les lemmes 4.3.0.2, 4.3.0.3 et le théorème 4.3.0.1) qui nous permettent de donner une caractérisation des endomorphismes continus de l'algèbre de Hadamard rationnelle  $r(K)$ ; ainsi, nous montrons, dans le théorème 4.4.0.2, que pour qu'une application  $f$  de  $r(K)$  dans  $r(K)$  un endomorphisme continu de l'algèbre de Hadamard  $r(K)$  il faut et il suffit qu'il existe une application  $\varphi$  dans l'ensemble  $\Phi$  telle que l'on ait :

$$\forall u \in r(K), \quad f(u) = u \circ \varphi.$$

nous donnons quelques exemples qui exhibent certains endomorphismes continus de l'algèbre  $r(K)$  et leurs applications semi-affines associées. Ensuite, nous donnons un exemple d'endomorphisme de  $r(K)$  non continu. Enfin, après avoir défini les applications semi-translations, on montre que les applications associées aux tressages (bijectifs et non bijectifs) sont, en fait, des semi-translations.

## 4.1 Idempotents de l'algèbre des suites récurrentes linéaires

Nous allons caractériser les idempotents des suites récurrentes linéaires c'est-à-dire de l'algèbre de Hadamard rationnelle  $r(K)$  lorsque  $K$  est un corps commutatif de caractéristique nulle.

On sait que les idempotents de  $S(K)$  sont de la forme  $\chi_N$ , avec  $N \subseteq \mathbb{N}$ , définies par :

$$\chi_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et comme  $r(K) \subset S(K)$  alors les idempotents de  $r(K)$  sont aussi de la même forme avec  $N$  une partie de  $\mathbb{N}$  à déterminer. Dans cette section, nous avons besoin du résultat suivant dû à Lech-Skolem-Mahler :

### **Théorème 4.1.0.2** [15, 16, 22]

Soit  $K$  un corps commutatif de caractéristique nulle et  $u$  une suite de l'algèbre de Hadamard  $r(K)$ . Posons  $Z = \{n \in \mathbb{N} : u(n) = 0\}$ . Si l'ensemble  $Z$  est infini alors il existe un entier naturel  $m$  non nul, des entiers distincts  $\mu_1, \dots, \mu_s$  dans  $\{0, 1, \dots, m-1\}$  tels que  $Z$  la réunion d'une partie finie  $I_0$  de  $\mathbb{N}$  et d'un nombre fini

$$I_{m, \mu_i} = \{n \in \mathbb{N} : n \equiv \mu_i \pmod{m}\},$$

de progressions arithmétiques.

### **Exemple**

Pour illustrer ce théorème de Lech-Skolem-Mahler, on donne l'exemple de la suite suivante  $u$  de longueur égale à 6, définie par :

$$\forall n \geq 6, \quad u(n+6) = 6u(n+4) - 12u(n+2) + 8u(n),$$

avec les conditions initiales  $(u(0), \dots, u(5)) = (8, 0, 9, 0, 8, 0)$ .

Les premiers termes de la suite  $u$  sont :

$$8, 0, 9, 0, 8, 0, 4, 0, 0, 0, 16, 0, 128, 0, \dots$$

L'ensemble des entiers naturels  $k$  tel que  $u(k) = 0$  est la réunion de l'ensemble fini  $\{8\}$  et de la progression arithmétique  $\{1, 3, 5, \dots\}$ .

Au fait, la suite  $u$  est donnée par :

$$u(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k + 1, \\ (n-8)^2 2^{(n-6)/2} & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

### **Proposition 4.1.0.12**

Soit  $K$  un corps commutatif de caractéristique nulle et  $N$  une partie de  $\mathbb{N}$ .

Pour que  $\chi_N$  appartienne à l'algèbre de Hadamard  $r(K)$  il faut et il suffit qu'il existe un entier naturel  $m$  non nul, des entiers  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_s \in \{0, \dots, m-1\}$  tels que  $N$  la réunion d'une partie finie  $I_0$  de  $\mathbb{N}$  et des ensembles

$$I_{m, \mu_i} = \{n \in \mathbb{N} : n \equiv \mu_i \pmod{m}\}.$$

**Démonstration**

Remarquons d'abord que si la partie  $N$  est finie alors  $\chi_N$  est nulle à partir d'un certain rang et donc appartient à  $r(K)$ .

Supposons que la partie  $N$  infinie.  $\chi_N \in r(K)$ , on a alors :

$$1 - \chi_N \in r(K),$$

et d'après le théorème 4.1.0.2, l'ensemble :

$$\{n \in \mathbb{N} : (1 - \chi_N)(n) = 0\}$$

est réunion d'une partie finie  $I_0$  de  $\mathbb{N}$  et des ensembles

$$I_{m,\mu_i} = \{n \in \mathbb{N} : n \equiv \mu_i \pmod{m}\}.$$

Donc

$$\{n \in \mathbb{N} : (\chi_N)(n) = 1\} = I_0 \cup (\cup_{i=1}^s I_{m,\mu_i}).$$

On prend alors  $N = I_0 \cup (\cup_{i=1}^s I_{m,\mu_i})$ .

Réciproquement, on montre que  $\chi_N \in r(K)$  avec  $N = I_0 \cup (\cup_{i=1}^s I_{m,\mu_i})$ ; ce qui est équivalent à montrer que la série génératrice  $\sum_{n \geq 0} \chi_N(n)x^n$  de  $\chi_N$  est rationnelle.

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \chi_N(n)x^n &= \sum_{n \in N} x^n \\ &= \sum_{n \in I_0} x^n + \sum_{i=1}^s \sum_{n \in I_{m,\mu_i}} x^n \\ &= \sum_{n \in I_0} x^n + \sum_{i=1}^s \sum_{k \geq 0} x^{\mu_i + km} \\ &= \sum_{n \in I_0} x^n + \sum_{i=1}^s x^{\mu_i} \sum_{k \geq 0} (x^m)^k \\ &= \sum_{n \in I_0} x^n + \sum_{i=1}^s \frac{x^{\mu_i}}{1 - x^m}. \end{aligned}$$

Par suite  $\sum_{n \geq 0} \chi_N(n)x^n$  est rationnelle.

□



## 4.2 Applications semi-affines

### 4.2.1 Définitions et notations

Dans ce qui suit, nous nous proposons de déterminer tous les endomorphismes continus de l'algèbre de Hadamard rationnelle  $r(K)$  lorsque  $K$  est un corps commutatif de caractéristique nulle.

#### Définition 4.2.1.1

Soit  $(d, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ ,  $a = (a_i)_{0 \leq i < d} \in \mathbb{N}^d$ ,  $b = (b_i)_{0 \leq i < d} \in \mathbb{Z}^d$  et  $c = (c_l)_{0 \leq l < dt} \in \mathbb{N}^{dt}$ .

On suppose ces données assujetties aux conditions  $a_i t + b_i \geq 0$  pour tout  $i \in \{0, \dots, d-1\}$ .

On définit l'application  $\varphi_{(d,a,b,c,t)}$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  par :

$$\varphi_{(d,a,b,c,t)}(n) = \begin{cases} c_n & \text{si } n < dt, \\ a_r \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor + b_r & \text{si } n \geq dt \end{cases}$$

où on a posé  $r = d \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$ .

Les applications de la forme  $\varphi_{(d,a,b,c,t)}$  sont dites semi-affines.

#### Définition 4.2.1.2

Les applications  $\varphi_{(d,a,b,c,t)}$  définies ci-dessus sont dites semi-translations lorsque tous les  $a_r$ ,  $0 \leq r < d$ , sont égaux à  $d$ .

#### Définition 4.2.1.3

Les applications  $\varphi_{(d,a,b,c,t)}$  définies ci-dessus sont dites purement semi-affines lorsque  $t$  est nul, et elles sont notées simplement  $\varphi_{(d,a,b)}$ .

#### Remarque 4.2.1.1

Les applications purement semi-affines  $\varphi_{(d,a,b)}$  sont définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_{(d,a,b)}(n) = a_r \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor + b_r,$$

où  $d \in \mathbb{N}^*$ ,  $a = (a_0, \dots, a_{d-1}) \in \mathbb{N}^d$ ,  $b = (b_0, \dots, b_{d-1}) \in \mathbb{Z}^d$  et  $r = d \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$ .

#### Notation

Nous notons  $\Phi$  l'ensemble des applications semi-affines et  $\Phi_0$  le sous-ensemble de  $\Phi$  des applications purement semi-affines.

Nous montrons plus loin qu'en fait l'ensemble  $\Phi$  est un monoïde et que  $\Phi_0$  est un sous-monoïde de  $\Phi$ .

Pour illustrer ces applications semi-affines, donnons l'exemple suivant pour les valeurs :  
 $d = 3$ ,  $t = 2$ ,  $a = (a_0, a_1, a_2) = (1, 3, 2)$ ,  $b = (b_0, b_1, b_2) = (4, 0, -3)$ ,  $n \geq 6$ .

Les points du graphe désignés par le symbole (+), sont les valeurs que prend l'application semi-affine  $\varphi_{(3,a,b,c,2)}$  dans  $\mathbb{N}$ , pour  $n \geq 6$ . Ces points sont disposés en trois blocs de telle façon que chaque bloc de points se trouve sur une droite. Les flèches relient tous les points qui sont en précédence. Il existe trois droites différentes; ce qui montre que l'application semi-affine  $\varphi_{(3,a,b,c,2)}$  est affine par morceaux.

## 4.2.2 Caractérisation des applications semi-affines

Nous caractérisons maintenant ces applications semi-affines comme solutions de certaines récurrences.

### Proposition 4.2.2.1

Soit  $(d, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$  et  $\varphi$  une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Il existe des suites finies  $a = (a_i)_{0 \leq i < d} \in \mathbb{N}^d$ ,  $b = (b_i)_{0 \leq i < d} \in \mathbb{Z}^d$  et  $c = (c_l)_{0 \leq l < dt} \in \mathbb{N}^{dt}$

vérifiant  $a_i t + b_i \geq 0$ , pour tout entier naturel  $i \in \{0, \dots, d-1\}$ , telles que :

$$\varphi = \varphi_{(d,a,b,c,t)}$$

2. Pour tout entier naturel  $n \geq dt$ , on a :

$$\varphi(n+2d) - 2\varphi(n+d) + \varphi(n) = 0.$$

3. Pour tout entier naturel  $n \geq dt$ , il existe un entier naturel  $A(n)$  tel que l'on ait :

$$\forall k \geq 0, \quad \varphi(n+kd) = \varphi(n) + kA(n).$$

### Démonstration

Il est facile de vérifier que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$a_r \left[ \frac{n+2d}{d} \right] + b_r - 2(a_r \left[ \frac{n+d}{d} \right] + b_r) + a_r \left[ \frac{n}{d} \right] + b_r = 0,$$

de sorte que la propriété (1) entraîne effectivement la propriété (2).

Supposons la validité de la propriété (2) et montrons la propriété (3).

Pour tout  $n \geq dt$ , la propriété (2) donne :

$$\varphi(n+3d) - 2\varphi(n+2d) + \varphi(n+d) = 0,$$

i.e.,

$$\varphi(n+3d) - \varphi(n+2d) = \varphi(n+2d) - \varphi(n+d),$$

on a alors pour tout entier  $k \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \varphi(n+(k+2)d) - \varphi(n+(k+1)d) &= \varphi(n+(k+1)d) - \varphi(n+kd) \\ &= \dots \\ &= \varphi(n+d) - \varphi(n). \end{aligned}$$

En posant  $A(n) = \varphi(n + d) - \varphi(n)$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned} \varphi(n + (k + 1)d) &= \varphi(n + kd) + A(n) \\ &= \varphi(n + (k - 1)d) + 2A(n) \\ &= \dots \\ &= \varphi(n) + (k + 1)A(n), \end{aligned}$$

d'où :

$$\varphi(n + kd) = \varphi(n) + kA(n).$$

Donc, pour tout  $n \geq dt$ , il existe  $A(n) = \varphi(n + d) - \varphi(n)$  tel que, pour tout  $k \geq 0$ , on a  $\varphi(n + kd) = \varphi(n) + kA(n)$ , de sorte que la propriété (2) entraîne la propriété (3).

Supposons la validité de la propriété (3) et montrons la propriété (1). Fixons un entier naturel  $r$  dans  $\{0, \dots, d - 1\}$  et  $n_r = dt + r$  le plus petit entier au moins égal à  $dt$  et congru à  $r$  modulo  $d$ . Soit  $v \in S(\mathbb{Q})$  la suite, dépendant de  $r$ , définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v(n) = \varphi(n_r + dn).$$

On trouve, d'après la propriété (3), que :

$$\forall n \geq dt, \quad v(n) = v(0) + nA(n_r),$$

et comme :

$$\begin{aligned} \varphi(n_r + dn) &= \varphi(dt + r + dn) \\ &= \varphi(d(n + t) + r), \end{aligned}$$

on déduit que :

$$\varphi(d(n + t) + r) = v(0) + nA(n_r).$$

D'où :

$$\begin{aligned} \varphi(r + dn) &= v(0) + (n - t)A(n_r) \\ &= nA(n_r) + v(0) - tA(n_r). \end{aligned}$$

On pose :

$$a_r = A(n_r) \quad \text{et} \quad b_r = v(0) - tA(n_r),$$

$a_r$  et  $b_r$  sont deux constantes éléments d'une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}$  et qui sont des entiers puisque la suite  $v$  ne prend que des valeurs entières. De plus, comme  $v$  est croissante à valeurs positives,  $a_r$  est un entier naturel et  $a_r t + b_r = v(0) \geq 0$ .

On obtient, pour tout  $n \geq dt$  :

$$\varphi(r + dn) = a_r n + b_r.$$

On pose de plus  $c_l = \varphi(l)$  pour tout entier naturel  $l < dt$ . On déduit alors que  $\varphi = \varphi_{(d,a,b,c,t)}$ . □

Pour tout  $d \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in \mathbb{N}$ , on note  $\Phi_{(d,t)}$  l'ensemble des applications semi-affines de la forme  $\varphi_{(d,a,b,c,t)}$ , où  $a \in \mathbb{N}^d$ ,  $b \in \mathbb{Z}^d$ , et  $c \in \mathbb{N}^{dt}$ . Il est clair que  $\Phi$  est la réunion des  $\Phi_{(d,t)}$ , quand  $d$  parcourt  $\mathbb{N}^*$  et  $t$  parcourt  $\mathbb{N}$ .

**Proposition 4.2.2.2**

L'ensemble  $\Phi$  est un sous-monoïde du monoïde de toutes les applications de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ .  
Plus précisément, si  $(d, d') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  et  $(t, t') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , alors :

$$\Phi_{(d,t)} \circ \Phi_{(d',t')} \subset \Phi_{(dd', \max(t,t'))}.$$

**Démonstration**

Soit des entiers naturels  $d, d' > 0$  et  $t, t'$ . Soit  $\varphi$  et  $\varphi'$  deux applications semi-affines dans  $\Phi_{(d,t)}$  et  $\Phi_{(d',t')}$  respectivement. Par la propriété (3) de la proposition 4.2.2.1, il existe des entiers naturels  $A(n), A'(n)$  tels que, pour tout  $n \geq dd' \max(t, t')$ , on a :

$$\begin{aligned} \forall k \geq 0, \quad (\varphi \circ \varphi')(n + kdd') &= \varphi(\varphi'(n + kdd')) \\ &= \varphi(\varphi'(n) + kdA'(n)) \\ &= \varphi(\varphi'(n)) + kA'(n)A(n). \end{aligned}$$

Toujours par la propriété (3) de la proposition 4.2.2.1, on déduit que l'application  $\varphi \circ \varphi'$  est semi-affine c'est-à-dire que  $\varphi \circ \varphi'$  est un élément de  $\Phi$ . □

Dans la proposition qui suit, nous allons donner l'écriture explicite de la composée de deux éléments de l'ensemble  $\Phi_0$  des applications purement semi-affines.

**Proposition 4.2.2.3**

Soit  $(d, d') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ,  $a = (a_0, \dots, a_{d-1}) \in \mathbb{N}^d$ ,  $b = (b_0, \dots, b_{d-1}) \in \mathbb{Z}^d$ ,  $a' = (a'_0, \dots, a'_{d'-1}) \in$

$\mathbb{N}^{d'}$ ,  $b' = (b'_0, \dots, b'_{d'-1}) \in \mathbb{Z}^{d'}$ . Alors il existe  $d'' \in \mathbb{N}^*$ ,  $a'' \in \mathbb{N}^{dd'}$  et  $b'' \in \mathbb{Z}^{dd'}$  tels que l'on ait :

$$\varphi_{(d,a,b)} \circ \varphi_{(d',a',b')} = \varphi_{(d'',a'',b'')}.$$

Plus précisément on a :  $d'' = dd'$  et

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, dd' - 1\}, \quad a''_k = a_r a'_s, \quad b''_k = a_r d \left[ \frac{a'_s \left[ \frac{k}{d'} \right] + b'_s}{d} \right] + b_r, \quad 0 \leq r < d, 0 \leq s < d'.$$

**Démonstration**

Soit  $(d, d') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ,  $(a, b) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{Z}^d$  et  $(a', b') \in \mathbb{N}^{d'} \times \mathbb{Z}^{d'}$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , posons :

$$\begin{aligned} n &= dd'q + k, \quad 0 \leq k < dd' \\ &= d'(dq + q_1) + s, \quad 0 \leq s < d'. \end{aligned}$$

où on a posé  $k = d'q_1 + s$ ,  $0 \leq s < d'$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} (\varphi_{(d,a,b)} \circ \varphi'_{(d',a',b')})(n) &= \varphi_{(d,a,b)} \left( a'_s \left[ \frac{n}{d'} \right] + b'_s \right) \\ &= \varphi_{(d,a,b)} (a'_s (dq + q_1) + b'_s) \\ &= \varphi_{(d,a,b)} (a'_s dq + a'_s q_1 + b'_s). \end{aligned}$$

En posant  $a'_s q_1 + b'_s = dq_2 + r$ ,  $0 \leq r < d$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned}
(\varphi_{(d,a,b)} \circ \varphi'_{(d',a',b')})(n) &= \varphi_{(d,a,b)}(a'_s dq + dq_2 + r). \\
&= \varphi_{(d,a,b)}(d(a'_s q + q_2) + r). \\
&= a_r(a'_s q + q_2) + b_r \\
&= a_r a'_s q + a_r q_2 + b_r \\
&= a_r a'_s \left[ \frac{n}{dd'} \right] + a_r q_2 + b_r,
\end{aligned}$$

où on a posé :

$$s = d' \left\{ \frac{k}{d'} \right\}, \quad r = d \left\{ \frac{a'_s \left[ \frac{k}{d'} \right] + b'_s}{d} \right\} \quad \text{et} \quad q_2 = d \left[ \frac{a'_s \left[ \frac{k}{d'} \right] + b'_s}{d} \right], \quad 0 \leq s < d', \quad 0 \leq r < d.$$

Il suffit de prendre alors :

$$d'' = dd', \quad a''_k = a_r a'_s \quad \text{et} \quad b''_k = a_r q_2 + b_r, \quad \text{avec} \quad 0 \leq k < dd',$$

de sorte qu'il existe  $a'' = (a''_0, \dots, a''_{dd'-1}) \in \mathbb{N}^{dd'}$  et  $b'' = (b''_0, \dots, b''_{dd'-1}) \in \mathbb{Z}^{dd'}$ , tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\varphi_{(d,a,b)} \circ \varphi'_{(d',a',b')})(n) = a''_k \left[ \frac{n}{dd'} \right] + b''_k, \quad k = dd' \left\{ \frac{n}{dd'} \right\}.$$

□

### Corollaire 4.2.3.1

*L'ensemble  $\Phi_0$  des applications purement semi-affines est un sous-monoïde du monoïde  $\Phi$  des applications semi-affines .*

### 4.2.3 Propriétés

#### Lemme 4.2.3.1

*Soit  $(d, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ ,  $(a, b) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{Z}^d$  et  $c \in \mathbb{N}^{dt}$ . Si l'application semi-affine  $\varphi_{(d,a,b,c,t)}$  est bijective alors le  $d$ -uplet a n'a aucune composante nulle.*

#### Démonstration

Posons  $a = (a_0, a_1, \dots, a_{d-1})$  et supposons qu'il existe un entier naturel  $j$ ,  $0 \leq j < d$ , tel que  $a_j = 0$ . Pour  $n \geq dt$ , on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_{(d,a,b,c,t)}(n) = a_r \left[ \frac{n}{d} \right] + b_r, \quad 0 \leq r < d,$$

ou encore :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi_{(d,a,b,c,t)}(d(t+k) + r) = (t+k)a_r + b_r, \quad 0 \leq r < d.$$

Pour  $r = j$ , on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi_{(d,a,b,c,t)}(d(t+k) + j) = b_j,$$

ce qui montre que l'application semi-affine  $\varphi_{(d,a,b,c,t)}$  n'est pas injective, donc n'est pas bijective.  $\square$

Nous allons montrer que ces applications semi-affines sont les changements d'indices transformant les suites récurrentes linéaires sur un anneau commutatif unitaire en suites récurrentes linéaires.

### Proposition 4.2.3.1

Soit  $A$  un anneau commutatif unitaire et  $\varphi$  une application semi-affine de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ . Si  $u$  est une suite récurrente linéaire sur  $A$  alors  $u \circ \varphi$  est une suite récurrente linéaire sur  $A$ .

### Démonstration

Il s'agit de montrer que si  $\varphi \in \Phi$  et  $u \in r(A)$  alors  $u \circ \varphi \in r(A)$ .

Écrivons  $\varphi = \varphi_{(d,a,b,c,t)}$  et  $u \in r(A)$ .

Pour montrer que  $u \circ \varphi \in r(A)$ , il suffit de montrer que  $T^{dt}(u \circ \varphi) \in r(A)$ .

On a alors pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{aligned} (T^{dt}(u \circ \varphi))(n) &= (u \circ \varphi)(n + dt) \\ &= u(\varphi(n + dt)) \end{aligned}$$

Or, puisque  $n + dt \geq dt$ , on a, en posant  $r = \left\{ \frac{n}{d} \right\}$  :

$$\begin{aligned} u(\varphi(n + dt)) &= u\left(a_r \left[ \frac{n + dt}{d} \right] + b_r\right), \\ &= u\left(a_r \left[ \frac{n}{d} \right] + a_r t + b_r\right), \end{aligned}$$

avec  $a_r t + b_r \geq 0$ .

Par conséquent, la suite  $T^{dt}(u \circ \varphi)$  est un emboîtement des suites  $u_r$ ,  $0 \leq r < d$ , définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_r(n) = u(a_r n + a_r t + b_r), \quad 0 \leq r < d$$

Par le théorème 2.3.2.1, on conclut que  $T^{dt}(u \circ \varphi) \in r(A)$ , et donc  $u \circ \varphi \in r(A)$ .  $\square$

En vertu de la proposition 1.3.0.6, on déduit le corollaire suivant :

### Corollaire 4.2.3.1

Avec les mêmes notations et hypothèses que ci-dessus, l'application, qui à toute suite  $u$ , associe la suite  $u \circ \varphi$  est un endomorphisme continu de  $r(A)$ .

### Remarque 4.2.3.1

Il existe des bijections semi-affines de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  qui ne sont pas données par la formule (3.2). Par exemple l'application  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par :

$$\varphi(3n) = 2n,$$

$$\varphi(3n + 1) = 4n + 1,$$

$$\varphi(3n + 2) = 4n + 3.$$

Notons que l'application  $\varphi$  est bijective. Elle est semi-affine. En effet, si pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$\varphi(n) = \varphi_0(3n),$$

$$\varphi(3n + 1) = \varphi_1(n),$$

$$\varphi(3n + 2) = \varphi_2(n),$$

alors l'application (ou la suite)  $\varphi$  est l'emboîtement  $E_3$  des suites  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  dont le polynôme caractéristique commun est  $p(x) = (x - 1)^2$ . D'où le polynôme caractéristique de  $\varphi$  est donné par :

$$p(x^3) = (x^3 - 1)^2 = x^6 - 2x^3 + 1.$$

Par conséquent, il existe un entier naturel  $t$  tel que la suite  $\varphi$  vérifie la récurrence linéaire suivante :

$$\forall n \geq 3t, \quad \varphi(n + 6) - 2\varphi(n + 3) + \varphi(n) = 0.$$

En appliquant la proposition 4.2.2.1, on déduit que  $\varphi$  est élément du monoïde  $\Phi$ , c'est-à-dire que la suite  $\varphi$  est semi-affine.

La suite  $\varphi$  ne peut pas se mettre sous la forme (3.2). En effet, s'il existait une permutation  $\sigma$  de l'ensemble  $\{0, 1, 2\}$  telle que l'on ait :

$$\varphi(n) = 3 \left[ \frac{n}{3} \right] + \sigma \left( 3 \left\{ \frac{n}{3} \right\} \right),$$

alors  $\varphi(2) = \varphi(3) = 3$ , ce qui prouve que  $\varphi$  n'est pas injective, d'où la contradiction.

Ainsi le groupe des tressages bijectifs est un sous-groupe propre du groupe des automorphismes bicontinus de  $r(A)$ .

### 4.3 Quelques lemmes

Dans ce qui suit, nous allons affiner davantage la description des endomorphismes continus de l'algèbre de Hadamard  $r(K)$ , lorsque  $K$  est un corps commutatif de caractéristique nulle. En vue de montrer que, tout endomorphisme continu de l'algèbre  $r(K)$  provient d'une application semi-affine, nous nous appuyons sur les deux lemmes suivants.

#### Lemme 4.3.0.2

*Soit  $K$  un corps commutatif de caractéristique nulle et  $\varphi$  une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ . Si l'implication*

$$\forall u \in S(K), \quad u \in r(K) \implies u \circ \varphi \in r(K)$$

*est vraie alors la suite  $(\frac{\varphi(n)}{n})_{n \geq 1}$  est bornée.*

**Démonstration**

Comme le corps  $K$  est de caractéristique nulle donc contient le corps  $\mathbb{Q}$ ,  $r(K)$  contient la suite géométrique  $u$  définie par :

$$\forall n \geq 0, u(n) = 2^n.$$

D'après l'hypothèse, on a :

$$u \circ \varphi \in r(K).$$

Par le lemme 2.2.1.3, on en déduit que :

$$u \circ \varphi \in r(\mathbb{Q}),$$

et on a, pour tout entier naturel  $n$  :

$$(u \circ \varphi)(n) = 2^{\varphi(n)}.$$

D'où, par le théorème 2.2.1.1 (voir aussi [7], p. 73), il existe un entier naturel  $n_0$ , un entier naturel  $s$  non nul, des polynômes  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , à coefficients complexes et des nombres complexes  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , qui sont les racines du polynôme minimal de  $u \circ \varphi$  tels que :

$$\forall n \geq n_0, \quad 2^{\varphi(n)} = \sum_{i=1}^s p_i(n) \alpha_i^n$$

En posant  $c = \max_{1 \leq i \leq s} \{\alpha_i\}$ , on a alors :

$$\forall n \geq n_0, \quad 2^{\varphi(n)} \leq c^n \sum_{i=1}^s |p_i(n)|.$$

En prenant le logarithme en base 2, on en déduit :

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{\varphi(n)}{n} \leq \log_2 c + \frac{\log_2(\sum_{i=1}^s |p_i(n)|)}{n}.$$

Comme la suite  $\frac{\log_2(\sum_{i=1}^s |p_i(n)|)}{n}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , elle est donc bornée par une constante  $c_1$ .

Par suite, on a :

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{\varphi(n)}{n} \leq \log_2 c + c_1.$$

Par conséquent, on obtient, pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :

$$\frac{\varphi(n)}{n} \leq \max \left\{ \log_2 c + c_1, \max_{j < n_0} \left( \frac{\varphi(j)}{j} \right) \right\}.$$

□

**Lemme 4.3.0.3**

Soit  $f(x) = \sum_{n \geq 0} \varphi(n)x^n$  une série entière formelle à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . On suppose que



$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ,  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes à coefficients dans  $\mathbb{C}$ , premiers entre eux, et que le rayon de convergence de  $f$  est supérieur ou égal à 1. Si  $\alpha_i, 1 \leq i \leq s$ , sont les racines du polynôme réciproque  $Q^*$  de  $Q$  alors :

$$\forall i \in \{1, \dots, s\}, |\alpha_i| \leq 1.$$

### Démonstration

Soit  $\beta_i, 1 \leq i \leq s$ , les racines de  $Q$  dans  $\mathbb{C}$ . Par définition, on a :

$$\forall i \in \{1, \dots, s\}, \beta_i = \frac{1}{\alpha_i}.$$

Supposons qu'il existe  $i_0 \in \{1, \dots, s\}$  tel que  $|\beta_{i_0}| < 1$ .

Comme les séries formelles  $P(x), f(x), Q(x)$  convergent pour  $|x| < 1$ , on a, pour tout nombre complexe  $x$  de module moindre que 1, la relation :

$$Q(x)f(x) = P(x).$$

En particulier, on trouve :

$$P(\beta_{i_0}) = Q(\beta_{i_0})f(\beta_{i_0}) = 0.$$

Donc  $\beta_{i_0}$  est une racine commune des polynômes  $P$  et  $Q$ ; ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle ils sont premiers entre eux. Par suite on a :

$$\forall i \in \{1, \dots, s\}, |\beta_i| \geq 1,$$

d'où :

$$\forall i \in \{1, \dots, s\}, |\alpha_i| \leq 1.$$

□

Dans la suite, en plus de ces deux lemmes, nous aurons aussi besoin du théorème de Kronecker suivant, que nous trouvons dans [19].

**Théorème 4.3.0.1**

*Soit  $\alpha$  un entier algébrique non nul. Si tous les conjugués de  $\alpha$  sont de module au plus égal à 1, alors  $\alpha$  est une racine de l'unité.*

## 4.4 Endomorphismes continus des suites récurrentes linéaires

Nous pouvons maintenant énoncer puis démontrer le résultat principal de ce chapitre, à savoir, le théorème qui caractérise les endomorphismes continus de l'algèbre de Hadamard rationnelle  $r(K)$ , lorsque  $K$  est un corps commutatif de caractéristique nulle.

**Théorème 4.4.0.2**

*Soit  $K$  est un corps commutatif de caractéristique nulle et  $f$  une application de  $r(K)$  dans  $r(K)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *l'application  $f$  est un endomorphisme continu de  $r(K)$*
2. *il existe une application semi-affine  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que, pour tout  $u$  appartenant à  $r(K)$ , on ait :*

$$f(u) = u \circ \varphi.$$

**Démonstration**

D'après le corollaire 4.2.3.1, seule l'implication  $1 \Rightarrow 2$  reste à démontrer.

donc  $f$  un endomorphisme continu de  $r(K)$ . En vertu du théorème 1.3.0.1, il existe une application  $\varphi$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que l'on ait  $f(u) = u \circ \varphi$  pour tout  $u$  dans  $r(K)$ . On va montrer que  $\varphi$  est une application semi-affine. On sait, en particulier, que  $\varphi = f(id_1)$  est une suite récurrente linéaire à coefficients dans  $K$ . D'après le lemme 2.2.1.3, on voit donc que :

$$\varphi \in r(K) \cap S(\mathbb{Q}) = r(\mathbb{Q}).$$

Par le théorème 2.2.1.1 (voir aussi [7], p. 73), il va exister deux entiers naturels  $n_0$  et  $h$ ,  $h \neq 0$ ,

des nombres complexes  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq h$ , et des polyômes  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq h$ , à coefficients complexes tels que :

$$\forall n \geq n_0, \quad \varphi(n) = \sum_{i=1}^h p_i(n) \alpha_i^n,$$

D'autre part, ce même théorème 2.2.1.1 assure que la série génératrice

$$f_\varphi(x) = \sum_{n \geq 0} \varphi(n) x^n$$

de la suite  $\varphi(n)$  peut être mise sous la forme d'une fraction rationnelle normalisée, c'est-à-dire qu'il existe deux polynômes  $P$  et  $Q$  à coefficients rationnels, premiers entre eux, avec  $Q(0) = 1$ , tels que  $f(x)Q(x) = P(x)$  dans l'anneau  $\mathbb{Q}[[x]]$  des séries entières formelles à coefficients rationnels. De plus, en vertu de la remarque du théorème 2.2.1.1 (voir aussi la

proposition 2 de ([7],p. 68), le polynôme  $Q$  est le polynôme réciproque du polynôme minimal de la suite récurrente linéaire  $\varphi$ , de sorte que les  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq h$ , sont les racines du polynôme  $Q^*$  réciproque de  $Q$ ; ainsi on peut écrire

$$Q(x) = (1 - \alpha_1 x)^{m_1} \cdots (1 - \alpha_h x)^{m_h}$$

pour certaines multiplicités  $m_i$  entiers naturels non nuls.  
De plus la suite  $\varphi$  vérifie la récurrence linéaire suivante :

$$\forall n \geq n_0, \quad \varphi(n+h) + q_{h-1}\varphi(n+h-1) + \cdots + q_0\varphi(n) = 0,$$

où  $h \in \mathbb{N}^*$ ,  $q_i \in K$ ,  $0 \leq i \leq h-1$ ,

et pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\varphi(n) \in \mathbb{Q}.$$

Et d'après le lemme 2.2.1.1, la suite  $\varphi$  est récurrente linéaire à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , de sorte que le polynôme unitaire  $Q^*$  est à coefficients entiers et que les nombres  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq h$ , sont des entiers algébriques.

La suite  $(\frac{\varphi(n)}{n})_{n \geq 1}$  étant bornée par le lemme 4.3.0.2, il existe alors une constante  $c > 0$  telle que :

$$\sum_{n \geq 0} |\varphi(n)| |x^n| < \sum_{n \geq 0} cn |x^n| < +\infty.$$

Par conséquent, le rayon de convergence de la série génératrice  $\sum_{n \geq 0} \varphi(n)x^n$  de la suite  $\varphi$  est supérieur ou égal à 1. Par le lemme 4.3.0.3, on en déduit que :

$$\forall i \in \{1, \dots, h\}, \quad |\alpha_i| \leq 1.$$

Tout conjugué sur  $\mathbb{Q}$  d'un nombre  $\alpha_i$  est une racine du polynôme  $Q^*$ , donc est un autre  $\alpha_j$ . Par conséquent, tous les nombres complexes qui sont des conjugués sur  $\mathbb{Q}$  de  $\alpha_i$  ont un module inférieur ou égal à 1. D'après le théorème 4.3.0.1 de Kronecker, et puisque les nombres  $\alpha_i$  sont des entiers algébriques, on en conclut que les  $\alpha_i$  sont des racines de l'unité.

Maintenant, on va montrer que, pour tout  $i \in \{1, \dots, h\}$ , le polynôme  $p_i$  est de degré inférieur ou égal à 1. Comme  $\varphi \in r(\mathbb{Z})$ , sa série génératrice est rationnelle, et on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \varphi(n)x^n &= \sum_{n \geq 0} \sum_{i=1}^h p_i(n)\alpha_i^n \\ &= \frac{P(x)}{Q(x)} \\ &= \frac{P(x)}{\prod_{i=1}^h (1 - \alpha_i x)^{m_i}}, \end{aligned}$$

où  $P, Q$  sont des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  et premiers entre eux, avec  $d^\circ p_i \leq m_i - 1$  et  $m_i \neq 0$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, h\}$ .

On va montrer que  $m_i \leq 2$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, h\}$ .

Supposons au contraire qu'il existe  $k \in \{1, \dots, h\}$  tel que  $m_k > 2$ . Puisque les deux membres sont deux séries entières formelles de rayon de convergence au moins 1, on a, pour tout nombre complexe  $x$  tel que  $|x| < 1$ , l'égalité :

$$(1 - \alpha_k x)^{m_k} \sum_{n \geq 0} \varphi(n) x^n = \frac{P(x)}{\prod_{i \neq k} (1 - \alpha_i x)^{m_i}}.$$

Pour  $t$  réel, élément de  $]0, 1[$ , on a  $\left| \frac{t}{\alpha_k} \right| = t < 1$ , donc on peut poser  $x = \frac{1}{\alpha_k} t$  dans cette dernière identité, et on obtient :

$$(1 - t)^{m_k} \sum_{n \geq 0} \varphi(n) \frac{t^n}{\alpha_k^n} = \frac{P\left(\frac{t}{\alpha_k}\right)}{\prod_{i \neq k} \left(1 - \frac{\alpha_i t}{\alpha_k}\right)^{m_i}}.$$

Quand  $t$  tend vers 1, d'une part, le membre de droite de cette dernière égalité tend vers une limite finie non nulle, c'est-à-dire :

$$\frac{P\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)}{\prod_{i \neq k} \left(1 - \frac{\alpha_i}{\alpha_k}\right)^{m_i}} \neq 0,$$

alors que, d'autre part, comme  $\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)_{n \geq 1}$  est bornée par la constante  $c > 0$  et du fait que  $|\alpha_k| = 1$ ,

on a :

$$\begin{aligned} \left| (1 - t)^{m_k} \sum_{n \geq 0} \varphi(n) \frac{t^n}{\alpha_k^n} \right| &\leq (1 - t)^{m_k} \sum_{n \geq 0} \varphi(n) t^n \\ &\leq (1 - t)^{m_k} \sum_{n \geq 0} n c t^n \\ &\leq (1 - t)^{m_k} \frac{ct}{(1 - t)^2} \\ &\leq (1 - t)^{m_k - 2} ct. \end{aligned}$$

Comme  $m_k > 2$  alors  $(1 - t)^{m_k - 2} ct$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers 1, d'où la contradiction.

On conclut donc que, pour tout  $i \in \{1, \dots, h\}$ , on a :

$$m_i \leq 2.$$

Par suite pour tout  $i \in \{1, \dots, h\}$ , on a, comme annoncé,  $d^\circ p_i \leq 1$ .

On écrit alors  $p_i$  sous la forme :

$$p_i(x) = A_i x + B_i,$$

où  $A_i$  et  $B_i$  sont des constantes complexes.

maintenant  $\xi$  une racine complexe de l'unité d'ordre exactement égal au plus petit commun multiple  $d$  des ordres des racines  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq h$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, h\}$ , il existe un entier naturel  $k_i$  tel que  $\alpha_i = \xi^{k_i}$ . On a alors, pour tout entier naturel  $n \geq n_0$  :

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \sum_{i=1}^h (A_i n + B_i) \xi^{k_i n} \\ &= \sum_{\xi^d=1} (A_\xi n + B_\xi) \xi^n. \end{aligned}$$

On constate que pour  $t$  supérieur ou égal à  $\frac{n_0}{d}$ , la suite  $\varphi$  vérifie la récurrence linéaire suivante :

$$\forall n \geq dt, \varphi(n + 2d) - 2\varphi(n + d) + \varphi(n) = 0.$$

D'après la proposition 4.2.2.1, il existe  $(d, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{N}^d$ ,  $b \in \mathbb{Z}^d$ ,  $c \in \mathbb{N}^{dt}$  tels que :

$$\forall n \geq dt, \quad \varphi(n) = \varphi_{(d,a,b,c,t)}(n),$$

ce qui signifie que l'application  $\varphi$  est semi-affine. □

### Remarques 4.4.0.1

1. A toute suite  $u \in K^{\mathbb{N}}$ , associons la suite

$$c(u) : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} \subset K,$$

telle que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$c(u)(n) = 0 \iff u(n) = 0.$$

Alors nous allons montrer que le théorème de Skolem-Lech-Mahler équivaut à dire que si la suite  $u$  est récurrente linéaire, alors la suite  $c(u)$  est aussi récurrente linéaire.

En effet, d'une part en partant de l'énoncé de ce théorème, étant donnée une suite récurrente linéaire  $u$ , la suite  $c(u)(n)$  est égal à zéro si et seulement si  $n$  appartient à un ensemble réunion d'un ensemble fini et d'une réunion finie de progressions arithmétiques. Par conséquent  $c(u)$  est un emboîtement de suites récurrentes linéaires (formées de 0 et de 1) et donc  $c(u)$  est une suite récurrente linéaire.

Réciproquement, on vérifie facilement que, pour toute suite  $v \in K^{\mathbb{N}}$ , on a :

$$v \circ c(u) = v(0) + (v(1) - v(0))c(u).$$

Il en résulte que la substitution  $v \mapsto v \circ c(u)$  transforme les suites récurrentes linéaires en suites récurrentes linéaires si et seulement si la suite  $c(u)$  est elle-même récurrente linéaire. Maintenant, notre théorème 4.4.0.2 nous dit que si la substitution  $v \mapsto v \circ c(u)$  transforme les suites récurrentes linéaires en suites récurrentes linéaires, alors la suite  $c(u)$  est semi-affine. Ainsi la suite  $c(u)$  est, à un nombre fini de termes près, un emboîtement d'un nombre fini d'applications affines et ces applications seront toutes constantes parce que  $c(u)$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Ainsi les zéros de la suite  $u$  sont, à un ensemble fini près, les éléments d'un nombre fini de progressions arithmétiques.

2. Le monoïde  $\Phi$  est isomorphe au monoïde opposé du monoïde  $End^c(r(K))$ . En d'autres termes, à tout endomorphisme continu de  $r(K)$ , correspond une application semi-affine de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  et inversement.

## 4.5 Exemples

Remarquons que les applications semi-affines qui correspondent aux tressages  $\psi_{d,\sigma}$  et  $\psi_{d,J,\sigma}$  sont des semi-translations (voir définition 4.2.1.2). Nous allons d'abord voir, dans les deux lemmes suivants que les restrictions, à une progression arithmétique de raison  $d$ , de ces semi-translations sont des translations. Ensuite, nous donnons quelques exemples d'endomorphismes continus de suites récurrentes linéaires et un exemple d'endomorphisme non continu.

### Lemme 4.5.0.4

*Soit  $d$  un entier naturel non nul et  $\sigma$  une permutation de l'ensemble  $\{0, 1, \dots, d-1\}$ . Soit  $u$  une progression arithmétique de raison  $d$ . Alors la restriction à  $u$  de la semi-translation  $\varphi$  associée au tressage  $\psi_{d,\sigma}$  est une translation.*

### Démonstration

On sait que la semi-translation  $\varphi$  qui correspond au tressage  $\psi_{d,\sigma}$  est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) = d \left[ \frac{n}{d} \right] + \sigma(n - d \left[ \frac{n}{d} \right]),$$

et on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) &= d \left[ \frac{n}{d} \right] + \sigma(n - d \left[ \frac{n}{d} \right]) \\ &= d \left( \frac{n}{d} - \left\{ \frac{n}{d} \right\} \right) + \sigma \left( n - d \left( \frac{n}{d} - \left\{ \frac{n}{d} \right\} \right) \right) \\ &= n - d \left\{ \frac{n}{d} \right\} + \sigma \left( d \left\{ \frac{n}{d} \right\} \right) \\ &= n - d \left( \frac{r}{d} \right) + \sigma \left( d \left( \frac{r}{d} \right) \right) \\ &= n - r + \sigma(r) \end{aligned}$$

où on a posé  $n = dq + r$  avec  $0 \leq r < d$ .

□

**Lemme 4.5.0.5**

Soit  $d$  un entier naturel non nul,  $J$  un  $d$ -uplet de  $\mathbb{N}^d$  et  $\sigma$  une permutation de l'ensemble  $\{0, 1, \dots, d-1\}$ . Soit  $u$  une progression arithmétique de raison  $d$ . Alors la restriction à  $u$  de la semi-translation  $\varphi$  associée au tressage  $\psi_{d,J,\sigma}$  est une translation.

**Démonstration**

On sait que la semi-translation qui correspond au tressage  $\psi_{d,J,\sigma}$  est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) = d\left(\left\lceil \frac{n}{d} \right\rceil + j_{\sigma(n-d\lceil \frac{n}{d} \rceil)}\right) + \sigma(n - d\lceil \frac{n}{d} \rceil),$$

et on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) &= d\left(\left\lceil \frac{n}{d} \right\rceil + j_{\sigma(n-d\lceil \frac{n}{d} \rceil)}\right) + \sigma(n - d\lceil \frac{n}{d} \rceil) \\ &= d\left(\frac{n}{d} - \left\{ \frac{n}{d} \right\} + j_{\sigma(n-d(\frac{n}{d} - \left\{ \frac{n}{d} \right\}))}\right) + \sigma\left(n - d\left(\frac{n}{d} - \left\{ \frac{n}{d} \right\}\right)\right) \\ &= n - d\left\{ \frac{n}{d} \right\} + j_{\sigma(d\left\{ \frac{n}{d} \right\})} + \sigma\left(d\left\{ \frac{n}{d} \right\}\right) \\ &= n - d\left(\frac{\rho}{d}\right) + j_{\sigma(d(\frac{\rho}{d}))} + \sigma\left(d\left(\frac{\rho}{d}\right)\right) \\ &= n - \rho + j_{\sigma(\rho)} + \sigma(\rho). \end{aligned}$$

où on a posé  $n = qd + \rho$  avec  $0 \leq \rho < d$ .

□

**Exemple 1**

Pour tout  $d \in \mathbb{N}^*$  et tout  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ , les endomorphismes suivants de l'algèbre  $r(K)$  :

$$T^i, \phi_d^i, T^i \circ \phi_d^j, \phi_d^i \circ T^j$$

sont continus ; les applications semi-affines  $\varphi$  qui leur correspondent sont définies respectivement par :

$$\varphi_{1,i}(n) = n + i,$$

$$\varphi_{2,i}(n) = d^i n,$$

$$\varphi_{3,i,j}(n) = d^i n + id^j,$$

$$\varphi_{4,i,j}(n) = d^i n + j.$$

**Exemple 2**

L'application  $f$  définie de  $S(K)$  dans  $S(K)$  par :

$$\forall u \in S(K), \forall n \in \mathbb{N}, \quad (f(u))(n) = u(n^2)$$

n'est pas un endomorphisme de  $r(K)$ . En effet, si on considère la suite  $u$  de  $r(K)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(n) = 2^n.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} v(n) &= (f(u))(n) \\ &= u(n^2) \\ &= 2^{n^2}. \end{aligned}$$

La série génératrice  $\sum_{n \geq 0} v(n)x^n$  de la suite  $v$  a pour rayon de convergence 0, donc elle n'est pas rationnelle et par suite  $v$  n'est pas dans  $r(K)$ .

Plus généralement, si  $P$  est un polynôme à coefficients dans  $K$ , de degré supérieur ou égal à 2, alors l'application  $f$  définie de  $S(K)$  dans  $S(K)$  par :

$$\forall u \in S(K), \forall n \in \mathbb{N}, \quad (f(u))(n) = u(P(n)),$$

n'est pas un endomorphisme de  $r(K)$ .

### Exemple 3

Soit  $K$  un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit  $a \in K \setminus \mathbb{Z}$  et  $s \in \mathbb{N}^*$ . L'application  $f$  de  $r(K)$  dans  $r(K)$ , définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad f(\delta_i) = 0$$

$$\forall u \in r(K), \quad f\left(\sum_{i \in F} a_i \delta_i + \sum_{i=1}^s p_i(n) \alpha_i^n\right)_{n \geq 0} = \left(\sum_{i=1}^s p_i(a) \alpha_i^n\right)_{n \geq 0}$$

est un endomorphisme non continu de  $r(K)$ . En effet :

Pour tout couple  $(u, v)$  dans  $(r(K))^2$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(n) = \sum_{i \in F} a_i \delta_i + \sum_{i=1}^s p_i(n) \alpha_i^n \quad \text{et} \quad v(n) = \sum_{i \in G} b_i \delta_i + \sum_{i=1}^s q_i(n) \beta_i^n,$$

il est facile de voir que :

$$f(u + v) = f(u) + f(v),$$

$$f(1_{r(K)}) = 1_{r(K)}.$$

pour montrer que  $f(u \odot v) = f(u) \odot f(v)$ , il suffit de montrer que, pour tout  $(p, q) \in K[x]$  et  $(\alpha, \beta) \in K$ , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(p(n)\alpha^n \odot q(n)\beta^n) = p(a)\alpha^n \odot q(a)\beta^n.$$



Donc,  $f$  est un endomorphisme de  $r(K)$ ; il n'est pas continu. En effet : dans le cas où  $K = \mathbb{C}$  et pour  $a \notin \mathbb{Z}$ , considérons la suite  $(u^p)_{p \geq 0}$ , définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u^p(n) = n(n-1) \cdots (n-p).$$

Cette suite tend vers zéro quand  $p$  tend vers l'infini mais la suite

$$f(u^p) = a(a-1) \cdots (a-p)$$

ne tend pas vers zéro.



# Bibliographie

- [1] A. AIT MOKHTAR, A. NECER, A. SALINIER, *Endomorphismes d'algèbres de suites*, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* 20 (2008), 1-21.
- [2] A. AIT MOKHTAR, *Quelques propriétés sur les suites récurrentes linéaires à coefficients polynomiaux*, thèse de Magister, Université des Sciences et de la Technologie Houari Bou-médiene (1989).
- [3] M. F. ATIYAH AND I. G. MACDONALD, *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [4] B. BENZAGHOU, *Algèbre de Hadamard*, *Bull. Soc. Math. France*, t. 98, 1970, p. 209-252.
- [5] B. BENZAGHOU, *Algèbre de Hadamard*. Séminaire Dubreil-Pisot, algèbre et théorie des nombres, 22<sup>e</sup> année, 1968/69, n<sup>o</sup> 13, p. 13.
- [6] J. BERSTEL, *Transductions and context-free languages*. Stuttgart, Teubner, 1979.
- [7] J. BERSTEL ET C. REUTENAUER, *Les séries rationnelles et leurs langages*, *Études et recherches en informatique*, Masson, Paris, 1984.
- [8] L. CERLIENCO, M. MIGNOTTE AND F. PIRAS, *Suites récurrentes linéaires : propriétés algébriques et arithmétiques*. *Enseig. Math*, 33, 67-108, 1987.
- [9] J. L. CHABERT, *Anneaux de polynômes à valeurs entières et anneaux de Fatou*. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 99, (1971), p. 273-283.
- [10] R. ENGELKING, *General Topology*, *Monografie Matematyczne* 60, Polska Akademia Nauk, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977.
- [11] G. EVEREST, A. VAN DER POORTEN, I. SHPARLINSKI, T. WARD, *Recurrence sequences*, *Mathematical Surveys and Monographs*, 104. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xiv+318pp.
- [12] P. FATOU, *Séries trigonométriques et séries de Taylor*. *Acta Math*, Uppsala, t. 30, 1906, p. 335-400, (Thèse, Sc. Math, Paris 1907).
- [13] S. W. GOLOMB, *Shift register sequences*. San Francisco, Holden-Day, 1967.
- [14] V. L. KURAKIN, A. S. KUSMIN, A. V. MIKHALEV AND A. A. NECHAEV, *Linear recurring sequences over rings and modules*. *J. of Math. Sci.*, 76(6) 2793-2915, 1995.
- [15] C. LECH, *A note on recurring series*, *Ark. Mat.* 2, (1953). 417-421.
- [16] S. L. MAHLER, *On the coefficients of rational functions*. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 52, 1956, p. 39-48.
- [17] M. MIGNOTTE, *Suites récurrentes linéaires*. *Sém. Delange-Pisot-Poitou*, t. 15, 1973/74, G.E. n<sup>o</sup> 14, 9 page.

- [18] M. MIGNOTTE, *Un algorithme sur la décomposition des polynômes dans un corps fini*. *C.R. Acad. Sc., Paris* 280 (1975), 137-139.
- [19] W. NARKIEWICZ, *Elementary and analytic theory of algebraic numbers*. Theorem 2.1, p. 46. *Second Edition*. Springer-Verlag, Berlin; PWN-Polish Scientific Publishers, Varsovie, 1990. xiv+746pp.
- [20] A. NECER, *Systèmes récurrents et algèbre de Hadamard de suites récurrentes linéaires sur des anneaux commutatifs*. *Comm. Algebra* 27 (1999), no. 12, 6175–6189.
- [21] C. PISOT, *Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques*. Montréal, Les presses de l'université de Montréal, 1963 (*Séminaire de Mathématiques Supérieures, Été 1963*, 5).
- [22] T. SKOLEM, *Ein Verfahren zur Behandlung gewisser exponentialer Gleichungen*, *Comptes Rendus du congrès ds mathématiciens scandinaves, Stockholm, 1934(1935)*, 163-188.